# Fonctions Zêta Spectrales de Graphes et Zêta de Riemann

Léonard Truscello

Lunch Seminar
HEIG-Vd

5 juin 2025

# Un mot sur la présentation

- Cette présentation s'appuie sur les recherches menées dans le cadre de mon travail de Master en physique théorique, réalisé en 2020 à l'Université de Genève. Les résultats et réflexions présentés ici sont issus de ce travail, qui portait sur la théorie des graphes et la théorie des nombres.
- Le mémoire complet est accessible en ligne à l'adresse suivante : *Spectral Zeta Function of Graphs and the Riemann Zeta Function*

# Fonction zêta

## Pietro Mengoli (1644)

$$\frac{1}{1\cdot 1}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 4}+\ldots$$
$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=?$$

# Fonction zêta

**Pietro Mengoli (1644)**

$$\frac{1}{1\cdot 1}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 4}+\ldots$$
$$=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=?$$

**Leonhard Euler (1743)**

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

# Fonction zêta

## Fonction zêta

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots$$

Avec k un nombre réel plus grand que 1.

# Fonction zêta

## Fonction zêta

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots$$

Avec k un nombre réel plus grand que 1.

## Les valeurs paires de la fonction zêta

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

# Questions Ouvertes

## Les valeurs paires de la fonction zêta

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

# Questions Ouvertes

## Les valeurs paires de la fonction zêta

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

## La nature des valeurs impaires de zêta ?

Est-ce que $\zeta(\mathrm{impair})$ est un irrationnel ?

# Questions Ouvertes

## Les valeurs paires de la fonction zêta

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$

## La nature des valeurs impaires de zêta ?

Est-ce que $\zeta(\mathrm{impair})$ est un irrationnel ?

## Les valeurs impaires de la fonction zêta ?

$$\zeta(3) = \pi^3 * r_3, \qquad \zeta(5) = \pi^5 * r_5, \qquad \zeta(7) = \pi^7 * r_7.$$

Avec $r_{2k+1}$, une fraction ?

# Fonction zêta de Riemann

## La fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Avec s un nombre complexe de partie réelle supérieure à 1.
Cette fonction se prolonge sur l'ensemble des nombres complexes excepté 1.

# Fonction zêta de Riemann

## La fonction zêta de Riemann

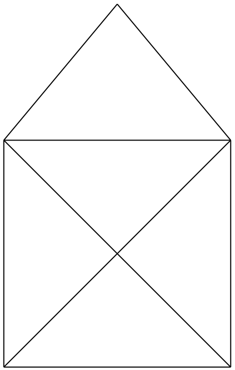
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Avec s un nombre complexe de partie réelle supérieure à 1.
Cette fonction se prolonge sur l'ensemble des nombres complexes excepté 1.

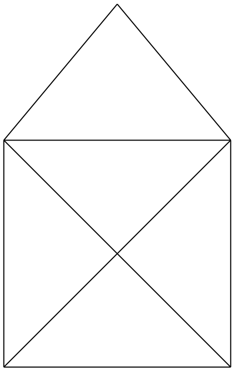
## L'hypothèse de Riemann (1859)

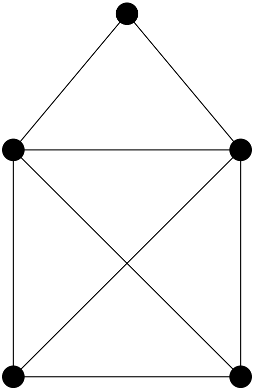
Pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, si $\zeta(s) = 0$, alors $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

# Le problème du dessin de la maison de St-Nicolas

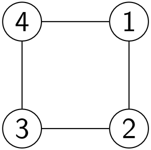


# Le problème du dessin de la maison de St-Nicolas

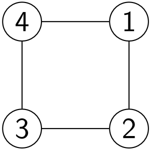




# La matrice laplacienne

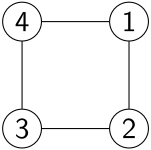


# La matrice laplacienne

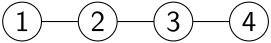



$$\Delta_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

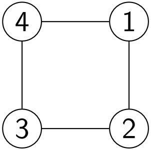
# La matrice laplacienne



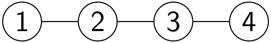

$$\Delta_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$



# La matrice laplacienne




$$\Delta_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$




$$\Delta_{[\![1;4]\!]} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# La fonction zêta spectrale

## Les valeurs propres du Laplacien

Les valeurs propres de la matrice Laplacienne pour un graphe G, simple, connexe et à n sommets sont

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \leq \lambda_{n-1}$$

# La fonction zêta spectrale

## Les valeurs propres du Laplacien

Les valeurs propres de la matrice Laplacienne pour un graphe G, simple, connexe et à n sommets sont

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \leq \lambda_{n-1}$$

## La fonction zêta spectrale de graphes

La fonction zêta spectrale d'un graphe G, simple, connexe et à n sommets est

$$\zeta_G(s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^s}$$

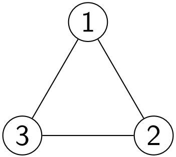
# La fonction zêta spectrale de graphes

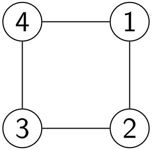
## Zêta Riemann et zêta spectrale

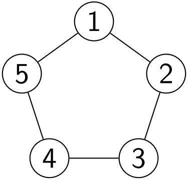
$$\zeta_{\mathrm{Riemann}}(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

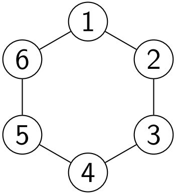
$$\zeta_{\mathrm{Graphe}}(s) = \frac{1}{\lambda_1^s} + \frac{1}{\lambda_2^s} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n-1}^s}$$

# Les graphes cycles

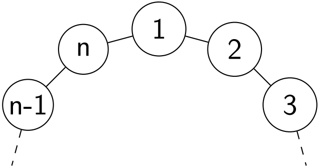


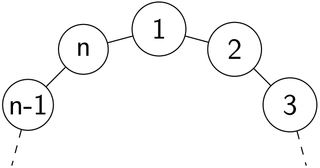



# Les graphes cycles

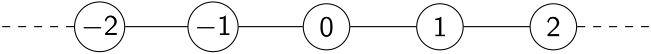



Graphe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

# Les graphes cycles




Graphe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$




Graphe $\mathbb{Z}$

# Fonction zêta spectrale du cycle

## Spectre du Laplacien du cycle

$$\lambda_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},k} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$

# Fonction zêta spectrale du cycle

## Spectre du Laplacien du cycle

$$\lambda_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},k} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$

## Fonction zêta spectrale du cycle

$$\zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left(4\sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)\right)^s}$$

# Développement asymptotique de $\zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(s)$

## Développement asymptotique du cycle, Friedli et Karlsson (2015)

Pour $\mathrm{Re}(s) < 3$ et s $\neq 1$, alors

$$2^s \cdot \zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\frac{s}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(1 - s/2)} n + 2\pi^{-s}\zeta(s)n^s + o\left(n^s\right)$$

pour $n \to \infty$.

# Développement asymptotique de $\zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(s)$

## Friedli et Karlsson (2015)

Pour $\mathrm{Re}(s) < 3$ et $s \neq 1$, alors

$$2^s \cdot \zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\left(\frac{s}{2}\right) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(1 - s/2)}}_{= 2^s \cdot \zeta_{\mathbb{Z}}\left(\frac{s}{2}\right)} n + \underbrace{2\pi^{-s}\zeta(s)n^s}_{\text{Riemann}} + o\left(n^s\right)$$

pour $n \to \infty$.

# Développement asymptotique de $\zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(s)$

## Friedli et Karlsson (2015)

Pour $\mathrm{Re}(s) < 3$ et s $\neq 1$, alors

$$2^s \cdot \zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\frac{s}{2}) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(1 - s/2)}}_{= 2^s \cdot \zeta_{\mathbb{Z}}(\frac{s}{2})} n + \underbrace{2\pi^{-s}\zeta(s)n^s}_{\text{Riemann}} + o\left(n^s\right)$$

pour $n \to \infty$.

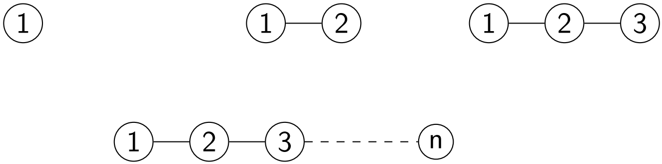
## Question : que se passe-t-il hors du domaine de définition ?

Pôles de la fonction Gamma : $\Gamma(-m) = \pm$"$\infty$" pour $m \in \mathbb{N}$.

Hors du domaine de définition :

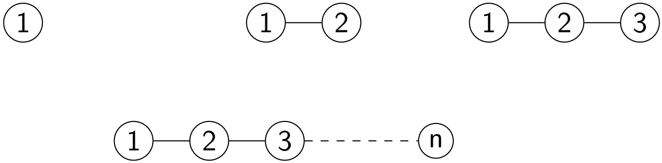
- valeurs spéciales paires bien définies,
- valeurs spéciales impaires pas définies.

# Les graphes chaînes

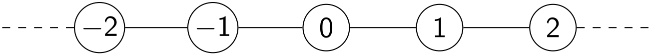



Graphe $[\![1; n]\!]$

# Les graphes chaînes




Graphe $[\![1; n]\!]$




Graphe $\mathbb{Z}$

# Spectre de la chaîne

## Spectre du Laplacien de la chaîne

$$\lambda_{[\![1;n]\!],k} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$$

avec $0 < k < n - 1$.

# Spectre de la chaîne

## Spectre du Laplacien de la chaîne

$$\lambda_{[\![1;n]\!],k} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$$

avec $0 < k < n - 1$.

## Spectre du Laplacien du cycle

$$\lambda_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},k} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)$$

# Fonction zêta spectrale de la chaîne

## Spectre du Laplacien de la chaîne

$$\lambda_{[\![1;n]\!],k} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$$

avec $0 < k < n - 1$.

# Fonction zêta spectrale de la chaîne

## Spectre du Laplacien de la chaîne

$$\lambda_{[\![1;n]\!],k} = 4 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$$

avec $0 < k < n - 1$.

## Fonction zêta spectrale de la chaîne

$$\zeta_{[\![1;n]\!]}(s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left(4\sin^2\left(\frac{\pi k}{2n}\right)\right)^s}$$

## La fonction thêta d'un graphe

$$\theta_G(t) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\lambda_k t}$$

## La fonction thêta d'un graphe

$$\theta_G(t) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\lambda_k t}$$

## La transformation de Mellin de la fonction thêta

$$\int_0^{\infty} (\theta_G(t) - 1) \cdot t^{s-1} \,\mathrm{dt} = \Gamma(s) \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\lambda_k^s}$$

## La fonction thêta d'un graphe

$$\theta_G(t) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\lambda_k t}$$

## La transformation de Mellin de la fonction thêta

$$\int_0^\infty (\theta_G(t) - 1) \cdot t^{s-1}\,\mathrm{dt} = \Gamma(s) \cdot \zeta_G(s)$$

# La chaîne en fonction du cycle

## Thêta de la chaîne en fonction de la thêta du cycle, Louis (2015)

$$\theta_{[\![1;n]\!]}(t) = \frac{1}{2}[1 - e^{-4t} + \theta_{\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}(\mathrm{t})]$$

# La chaîne en fonction du cycle

## Thêta de la chaîne en fonction de la thêta du cycle, Louis (2015)

$$\theta_{[\![1;n]\!]}(t) = \frac{1}{2}[1 - e^{-4t} + \theta_{\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}(\mathrm{t})]$$

## Zêta de la chaîne en fonction de la zêta du cycle

Avec la transformation de Mellin, on obtient

$$\zeta_{[\![1;n]\!]}(s) = \frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}(s) - \frac{1}{2 \cdot 4^s}$$

$$\zeta_{\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}(s) = 2\,\zeta_{[\![1;n]\!]}(s) + \frac{1}{4^s}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$.

# développement asymptotique de $\zeta_{[\![1;n]\!]}(s)$

**Développement asymptotique de $\zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(s)$, Friedli et Karlsson (2015)**

$$2^s \cdot \zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\frac{s}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(1 - s/2)} n + 2\pi^{-s} \zeta(s) n^s + o\left(n^s\right)$$

# développement asymptotique de $\zeta_{[\![1;n]\!]}(s)$

**Développement asymptotique de $\zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(s)$, Friedli et Karlsson (2015)**

$$2^s \cdot \zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\frac{s}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(1 - s/2)} n + 2\pi^{-s}\zeta(s)n^s + o\left(n^s\right)$$

**Développement asymptotique de $\zeta_{\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}(s)$**

$$2^s \cdot \zeta_{\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}}(\frac{s}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(1 - s/2)} 2n + 2\pi^{-s}\zeta(s)(2n)^s + o\left((2n)^s\right)$$

# développement asymptotique de $\zeta(s)$

## Développement asymptotique de $\zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(s)$, Friedli et Karlsson (2015)

$$2^s \cdot \zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\frac{s}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(1 - s/2)} n + 2\pi^{-s}\zeta(s)n^s + o\left(n^s\right)$$

## Développement asymptotique de $\zeta_{[\![1;n]\!]}(s)$

Pour $\mathrm{Re}(s) < 3$ et s $\neq 1$, alors

$$2^s \cdot \zeta_{[\![1;n]\!]}(\frac{s}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(1 - s/2)} n + 2^s\pi^{-s}\zeta(s)n^s - \frac{1}{2} + o\left(n^s\right)$$

pour $n \to \infty$.

# Fonction $\eta_n(s)$

## La fonction $\eta_n(s)$

$$\eta_n(s) := 2^s \cdot \zeta_{[\![1;n]\!]}\left(\frac{s}{2}\right) - 2^s \cdot \zeta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\left(\frac{s}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^s\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^s\left(\frac{\pi l}{n}\right)}$$

$$\eta_n(s) = \sum_{k=1}^{2\cdot\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{k-1}}{\sin^s\left(\frac{\pi k}{2n}\right)}$$

# Le développement asymptotique de $\eta_n(s)$

## La fonction $\eta_n(s)$

$$\eta_n(s) = \sum_{k=1}^{2\cdot\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{k-1}}{\sin^s\left(\frac{\pi k}{2n}\right)}$$

# Le développement asymptotique de $\eta_n(s)$

## La fonction $\eta_n(s)$

$$\eta_n(s) = \sum_{k=1}^{2\cdot\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{k-1}}{\sin^s\left(\frac{\pi k}{2n}\right)}$$

## Développement asymptotique de $\eta_n(s)$

Pour $\mathrm{Re}(s) < 3$ et s $\neq 1$, on a

$$\eta_n(s) = 2(2^{s-1} - 1)\pi^{-s}\zeta(s)n^s - \frac{1}{2} + o\left(n^s\right)$$

pour $n \to \infty$.

# La fonction zêta de Riemann

## $\zeta(s)$ en fonction de $\eta_n(s)$

Pour $\mathrm{Re}(s) < 3$ et $s \neq 1 + i\frac{2\pi k}{\ln(2)}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\zeta(s) = \frac{\pi^s}{2(2^{s-1} - 1)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n(s) + \frac{1}{2}}{n^s}$$

# La fonction zêta de Riemann

## $\zeta(s)$ en fonction de $\eta_n(s)$

Pour $\mathrm{Re}(s) < 3$ et $s \neq 1 + i\frac{2\pi k}{\ln(2)}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\zeta(s) = \frac{\pi^s}{2(2^{s-1}-1)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n(s)+\frac{1}{2}}{n^s}$$

## La fonction $\eta(s)$

$$\eta(s) := \lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n(s)+\frac{1}{2}}{n^s}$$

# La fonction zêta de Riemann

## $\zeta(s)$ en fonction de $\eta(s)$

Pour $\mathrm{Re}(s) < 3$ et $s \neq 1 + i\frac{2\pi k}{\ln(2)}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\zeta(s) = \frac{\pi^s}{2(2^{s-1} - 1)} \cdot \eta(s)$$

## La fonction $\eta(s)$

$$\eta(s) := \lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n(s) + \frac{1}{2}}{n^s}$$

# La fonction zêta de Riemann

## $\zeta(s)$ en fonction de $\eta(s)$

Pour $\mathrm{Re}(s) < 3$ et $s \neq 1 + i\frac{2\pi k}{\ln(2)}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\zeta(s) = \frac{\pi^s}{2(2^{s-1} - 1)} \cdot \eta(s)$$

## Question :

Que peut-on dire de cette expression pour $\mathrm{Re}(s) \geq 3$ ?

# La fonction êta de Dirichlet

## Calcul de $\eta(s)$ pour $\mathrm{Re}(s) \geq 3$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n(s) + \frac{1}{2}}{n^s} = \frac{2^s}{\pi^s} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$$

# La fonction êta de Dirichlet

## Calcul de $\eta(s)$ pour $\mathrm{Re}(s) \geq 3$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n(s) + \frac{1}{2}}{n^s} = \frac{2^s}{\pi^s} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$$

## La fonction êta de Dirichlet

$$\eta_{\text{Dirichlet}}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$$

# La fonction zêta alternée

## La fonction êta de Dirichlet

$$\eta_{\text{Dirichlet}}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$$

# La fonction zêta alternée

## La fonction êta de Dirichlet

$$\eta_{\mathrm{Dirichlet}}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$$

## La fonction zêta alternée

Pour $\mathrm{Re}(s) \geq 3$, on a

$$\frac{\pi^s}{2(2^{s-1}-1)} \cdot \eta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \cdot \eta_{\mathrm{Dirichlet}}(s) = \zeta(s)$$

# Expression méromorphique de $\zeta(s)$

**La fonction zêta de Riemann**

Pour $s \in \mathbb{C}$ et $s \neq 1 + i\frac{2\pi k}{\ln(2)}$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\zeta(s) = \frac{\pi^s}{2(2^{s-1}-1)} \cdot \eta(s)$$

# Expression méromorphique de $\zeta(s)$

## La fonction zêta de Riemann

Pour $s \in \mathbb{C}$ et $s \neq 1 + i\frac{2\pi k}{\ln(2)}$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\zeta(s) = \frac{\pi^s}{2(2^{s-1} - 1)} \cdot \eta(s)$$

## Remarques

1. La fonction est définie presque partout sur $\mathbb{C}$
2. "Commensurabilité" à $\pi^s$

# Reformulation de l'hypothèse de Riemann

## La fonction zêta de Riemann pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$

$$\zeta(s) = \frac{\pi^s}{2(2^{s-1} - 1)} \cdot \eta(s)$$

# Reformulation de l'hypothèse de Riemann

## La fonction zêta de Riemann pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$

$$\zeta(s) = \frac{\pi^s}{2(2^{s-1}-1)} \cdot \eta(s)$$

## Rappel développement asymptotique de $\eta_n(s)$ pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$

$$\eta_n(s) = 2(2^{s-1}-1)\pi^{-s}\zeta(s)n^s - \frac{1}{2} + o\left(n^s\right)$$

pour $n \to \infty$.

# Reformulation de l'hypothèse de Riemann

## La fonction zêta de Riemann pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$

$$\zeta(s) = \frac{\pi^s}{2(2^{s-1}-1)} \cdot \eta(s)$$

## Rappel développement asymptotique de $\eta_n(s)$ pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$

$$\eta_n(s) = 2(2^{s-1}-1)\pi^{-s}\zeta(s)n^s - \frac{1}{2} + O\left(n^{s-2}\right)$$

pour $n \to \infty$.

# Reformulation de l'hypothèse de Riemann

## La fonction zêta de Riemann pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$

$$\zeta(s) = \frac{\pi^s}{2(2^{s-1}-1)} \cdot \eta(s)$$

## Rappel développement asymptotique de $\eta_n(s)$ pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$

$$\eta_n(s) = 2(2^{s-1}-1)\pi^{-s}\zeta(s)n^s - \frac{1}{2} + o\left(n^{-1}\right)$$

pour $n \to \infty$.

# Reformulation de l'hypothèse de Riemann

## Reformulation de l'hypothèse de Riemann

Pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, les énoncés suivants sont équivalents

1. $\zeta(s) = 0$ seulement si $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$,
2. $\eta(s) = 0$ seulement si $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$,
3. $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n(s) = -\frac{1}{2}$ seulement si $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

# Reformulation de l'hypothèse de Riemann

## Reformulation de l'hypothèse de Riemann

Pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, les énoncés suivants sont équivalents

1. $\zeta(s) = 0$ seulement si $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$,
2. $\eta(s) = 0$ seulement si $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n(s) = -\frac{1}{2}$ seulement si $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

## Rappel $\eta_n(s)$ et $eta(s)$

$$\eta_n(s) = \sum_{k=1}^{2\cdot\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{k-1}}{\sin^s\left(\frac{\pi k}{2n}\right)}, \qquad \eta(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{\eta_n(s)}{n^s}$$

# Anecdote finale

## Reformulation de l'hypothèse de Riemann

Pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, les énoncés suivants sont équivalents

1. $\zeta(s) = 0$ seulement si $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$,
2. $\eta(s) = 0$ seulement si $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$,
3. $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n(s) = -\frac{1}{2}$ seulement si $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

## Rappel $\eta_n(s)$ et $eta(s)$

$$\eta_n(s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^s\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{\sin^s\left(\frac{\pi l}{n}\right)}$$