

Télétrafic (TTR)

SERIE 2

Chaînes de Markov continues

Novembre 2019

stephan.robort@heig-vd.ch

Problème 1

Une usine a n machines et un technicien pour les réparer. Une machine est en état de marche pendant un temps exponentiellement distribué avec le paramètre μ . Le technicien travaille sur une machine à la fois et ça lui prend un temps exponentiellement distribué (de paramètre α) pour réparer chaque machine. Soit $X(t)$ le nombre de machines en état de marche au temps t .

1. Montrez que si $X(t) = k$, alors le temps jusqu'à ce que la prochaine machine tombe en panne est une variable exponentiellement distribuée avec le paramètre $k\mu$.
2. Trouvez le générateur et dessinez le diagramme de transition pour $X(t)$.
3. Ecrivez les équations de balance globales et trouvez les probabilités d'état stationnaires pour $X(t)$.

Problème 2

Dessinez le diagramme de transition et trouvez les probabilités d'état de la chaîne de Markov continue ayant le générateur suivant :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

Problème 3

Soit $X(t)$ un modèle continu pour l'activité de la voix, dans lequel une personne est active (état 1) durant un temps exponentiellement distribué avec le paramètre α et silencieux (état 0) durant un temps exponentiellement distribué avec le paramètre β . Faites l'hypothèse que les durées d'activité et de silence sont des variables aléatoires indépendantes.

1. Trouvez la chaîne de Markov deux états pour $X(t)$.
2. Trouvez $\pi_0(t)$ et $\pi_1(t)$.
3. (*) Trouvez la fonction d'autocorrélation de $X(t)$.
4. Si $X(t)$ est asymptotiquement WSS, trouvez sa densité spectrale.
5. Supposez que vous ayez n personnes qui parlent indépendamment et soit $N(t)$ le nombre de personnes actives au temps t . Trouvez la fonction d'autocorrélation de $N(t)$ et sa densité spectrale si elle est asymptotiquement WSS.

Problème 4

Soit une marche aléatoire dans l'ensemble des états $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots, M\}$ avec les probabilités de transition :

$$\begin{aligned}p_{01} &= 1 \\p_{M,M-1} &= 1 \\p_{i,i-1} &= q, i = 1, \dots, M-1 \\p_{i,i+1} &= p, i = 1, \dots, M-1\end{aligned}$$

Trouvez la portion de temps passé dans chacun des états.