Chaînes de Markov discrètes

Enseignant : Dr Stephan Robert

Septembre 2019

Chaînes de Markov discrètes

Introduction

- $\{X_n\}$: suite de variables aléatoires prenant des valeurs dans $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$, $\mathcal{E}$ dénombrable.

- Propriété de **Markov** :

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) =$$
$$P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

- Notation : $X_n = i$, $i \in \mathcal{E}$

- Définition : **Probabilité de transition** :

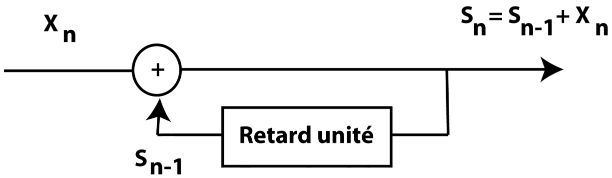
$$P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

Exemple

Somme de variables aléatoires X_i, $i \in \mathbb{N}$, iid :

- $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$
- $S_n = S_{n-1} + X_n$

Avec $S_0 = 0$ nous remarquons que le processus est Markovien.

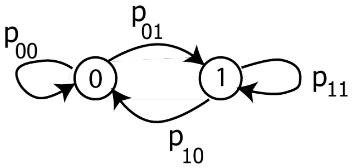


Matrice et diagramme de transition

Nous pouvons écrire la **matrice de transition** de la chaîne en utilisant la notation suivante :

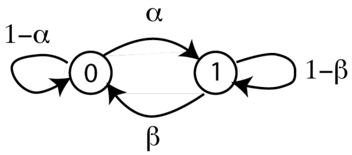
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0m} \\ p_{12} & p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m0} & p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

Il est souvent utile de dessiner le **diagramme des probabilités de transition** (ou **diagramme de transition**), par exemple pour $m = 2$:



Exemple : ATM

Un créneau est soit vide soit plein suivant qu'il contienne ou non un paquet.



Matrice de transition (ou **matrice stochastique**) :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0|X_n=0)=p_{00} & P(X_{n+1}=1|X_n=0)=p_{01} \\ P(X_{n+1}=0|X_n=1)=p_{10} & P(X_{n+1}=1|X_n=1)=p_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Exemple : ATM (2)

Observation importante :

- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) + P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = 1$
- $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) + P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 1$

Généralisation :

$$\sum_j P(X_{n+1} = j|X_n = i) = \sum_j p_{ij} = 1$$

D'où le nom “matrice stochastique” !

Probabilités d'état

Probabilités de transition après n pas

Sujet d'intérêt : Calcul des probabilités de transition après n transitions.

Théorême :

> La matrice des probabilités de transition après n pas $\mathbf{P}(n)$ est la puissance n de la matrice des probabilités de transition $\mathbf{P}$, soit $\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}^n$.

Probabilités de transition après n pas (2)

Démonstration du théorème

Probabilité de passer de l'état i (n=0) à l'état j (n=2) en passant par l'état k (n=1) :

$$P(X_2 = j, X_1 = k | X_0 = i) = \frac{P(X_2 = j, X_1 = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)}$$

$$= \frac{P(X_2 = j | X_1 = k) P(X_1 = k | X_0 = i) P(X_0 = i)}{P(X_0 = i)}$$

$$= P(X_2 = j | X_1 = k) P(X_1 = k | X_0 = i)$$

Probabilités de transition après n pas (3)

Finalement :

$$P(X_2 = j, X_1 = k | X_0 = i) = p_{ik}(1)p_{kj}(1)$$

$p_{ij}(2)$ est la probabilité d'aller de i à j en sommant tous les états k intermédiaires :

$$p_{ij}(2) = \sum_k p_{ik}(1)p_{kj}(1) \ \forall i, j$$

Cet ensemble d'équations montre que $\mathbf{P}(2)$ est obtenue en multipliant la matrice $\mathbf{P}(1)$ par elle-même : $\mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(1).\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}.\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$.

Probabilités de transition après n pas (4)

Equation de Chapman-Kolmogorov

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}(n-1).\mathbf{P}$$

et

$$\mathbf{P}^{n+m} = \mathbf{P}^{n}\mathbf{P}^{m}$$

avec $n, m \geq 0$.

Probabilités d'état

Quelle est la **probabilité** de se trouver dans un **état donné** de la chaîne de Markov à un **temps arbitraire** n ?

Notation :

$$\mathbf{p}(n) = \begin{pmatrix} p_1(n) & p_2(n) & \dots & p_l(n) \end{pmatrix}$$

Observation :

$$p_j(n) = \sum_i P(X_n = j | X_{n-1} = i) P(X_{n-1} = i) = \sum_i p_{ij}.p_i(n-1)$$

$$\boxed{\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1).\mathbf{P}}$$

Probabilités d'état (2)

Lorsque n devient grand,

$$\mathbf{p}(n) \approx \mathbf{p}(n-1)$$

On va écrire

$$\mathbf{p}(\infty) = \pi$$

et donc

$$\boxed{\pi = \pi.\mathbf{P}}$$

avec $\sum_i \pi_i = 1$

Exemple

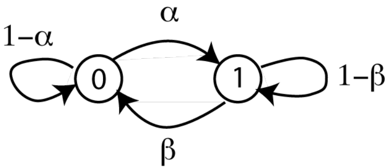


Figure – Chaîne de Markov à deux états

Matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Exemple (2)

- $\alpha = 0.1$
- $\beta = 0.3$

Calculons $\mathbf{P}^n$:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.84 & 0.16 \\ 0.48 & 0.52 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0.78 & 0.22 \\ 0.65 & 0.35 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{10} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Exemple (3)

Observation : $\mathbf{P}^n$ converge bien quand n devient grand !

$$\mathbf{P}^n \to \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

quand $n \to \infty$.
A chercher : Probabilités d'état stationnaires.

$$\pi = \pi \mathbf{P}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Exemple (3)

En explicitant :

$$\pi_0 = \pi_0(1-\alpha) + \pi_1\beta$$
$$\pi_1 = \pi_0\alpha + \pi_1(1-\beta)$$

or il y a un problème ! Les deux équations sont linéairement dépendantes ! Il faut se rappeler que

$$\sum_i \pi_i = 1$$

Exemple (4)

En résolvant ces deux équations :

$$\pi_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$
$$\pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

et avec $\alpha = 0.1$ et $\beta = 0.3$:

- $\pi_0 = 3/4$
- $\pi_1 = 1/4$

Exercice

Soit une matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Trouvez les probabilités d'état et dessinez la chaîne de Markov.

Classification des états

Propriétés de récurrence

Définitions :

- Un état j est dit **accessible** depuis l'état i si $p_{ij}(n) > 0, \ n \geq 0$.
- Si tous les états d'une chaîne de Markov sont accessibles, on dit qu'ils appartiennent à une même classe et la chaîne est dite **irréductible**.
- Un état est dit **récurrent** si la probabilité d'y retourner est égale à 1. Dans le cas contraire l'état est dit **transitoire**.
- Un état est dit **absorbant** lorsque la probabilité de rester dans l'état est égale à 1.

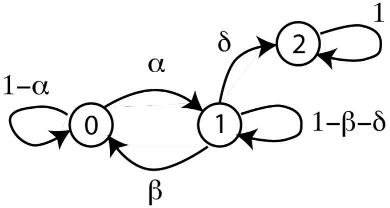
Propriétés de récurrence(2)

Observations :

- Un état **récurrent** est visité un **nombre infini** de fois. Un état **transitoire** n'est visité qu'un **nombre fini** de fois.
- Si un état est récurrent alors tous les états de sa classe sont aussi récurrents. La **récurrence** est une propriété de la classe.
- Si on démarre la chaîne de Markov dans un état récurrent alors on y reviendra un nombre infini de fois.

Exemple

Chaîne de Markov à trois états dont un est absorbant, avec $\alpha, \beta, \delta > 0$:



Temps d'absorption

Temps jusqu'à la première visite de l'état i à partir du démarrage de la chaîne :

$$T_j = \inf\{n \in \mathbb{N}^+ : X(n) = j\}$$

Etat récurrent :

$$P(T_j < \infty | X_0 = j) = 1$$

Etat **récurrent positif** :

$$E(T_j | X_0 = j) < \infty$$

Etat **récurrent nul** :

$$E(T_j | X_0 = j) = \infty$$

Temps d'absorbtion (2)

Proportion de temps passé dans un état :

$$\pi_i = \frac{1}{E[T_j | X_0 = j]}$$

Chaîne de Markov **périodique** : Tous les états sont visités à des instants qui sont des multiples d'un nombre entier $d > 1$.
Définition : On dit qu'une chaîne de Markov est **ergodique** si elle est apériodique et et que tous ses états sont récurrents positifs.

Exemple 1

Chaîne de Markov à deux états :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

L'état 0 est récurrent :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n) = 1 + 1 + ... + 1 = \infty.$$

L'état 1 est transitoire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{11}(n) = 0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 + ... = 2 < \infty.$$

Exemple 2

Chaîne de Markov à deux états :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La chaîne de Markov est périodique, de période $d = 2$ car $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^6 = \ldots = \mathbf{I}$

Exercices

Dessinez les diagrammes de transition des chaînes de Markov suivantes, pour :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Donnez également les propriétés des différents états des chaînes de Markov.

Réversibilité dans le temps et calcul du temps d'absorption

Réversibilité dans le temps

Soit une chaîne de Markov ergodique ayant une matrice de transition **P** et une densité de probabilité à l'état stationnaire π

$$P(X_{n-1} = j | X_n = i, X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+k} = i_k) =$$

$$= \frac{P(X_{n-1} = j, X_n = i, X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+k} = i_k)}{P(X_n = i, X_{n+1} = i_1, \ldots, X_{n+k} = i_k)}$$

$$= \frac{\pi_j p_{ji} p_{ii_1} \ldots p_{i_{k-1}, i_k}}{\pi_j p_{ii_1} \ldots p_{i_{k-1}, i_k}}$$

$$= \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i} = P(X_{n-1} = j | X_n = i) = q_{ij}$$

Réversibilité dans le temps

Observations :

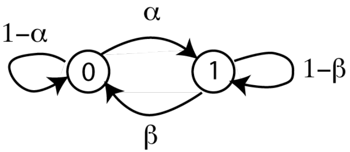
- Le processus *à l'envers* est également markovien !
- Les probabilités d'état stationnaires sont identiques.
- On déduit que $\forall i, j \in \mathcal{E}$,

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j p_{ji}$$

- La chaîne de Markov est réversible **réversible** si $\mathbf{P}$ est telle que $q_{ij} = p_{ij}$, $\forall i, j \in \mathcal{E}$

Exemple : Chaîne réversible

Chaîne de Markov à 2 états



Probabilités d'états stationnaires :

$$\pi_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$
$$\pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Exemple : Chaîne réversible (2)

En calculant les q_{ij} :

- $q_{00} = p_{00}$
- $q_{11} = p_{11}$
- $q_{01} = \pi_1 p_{10} / \pi_0 = \alpha = p_{01}$
- $q_{10} = \pi_0 p_{01} / \pi_1 = \beta = p_{10}$

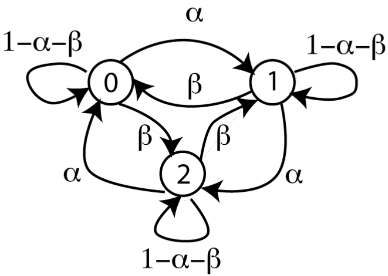
Donc

$$q_{ij} = p_{ij}$$

Ça signifie que la chaîne est **réversible** !

Exemple : Chaîne non réversible

Chaîne de Markov à 3 états



Par symétrie, nous avons :

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exemple : Chaîne non réversible (2)

Nous pouvons facilement déduire les q_{ij}, $\forall i, j \in \{0, 1, 2\}$:

- $q_{00} = q_{11} = q_{22} = 1 - \alpha - \beta$
- $q_{12} = p_{21} = \beta$

Avec $q_{12} \neq p_{12}$, la chaîne est donc **non réversible**, sauf lorsque $\alpha = \beta$.

Exercices

1. Trouvez une chaîne de Markov périodique non réversible.
2. Trouvez une chaîne de Markov périodique réversible.

Probabilité d'absorption

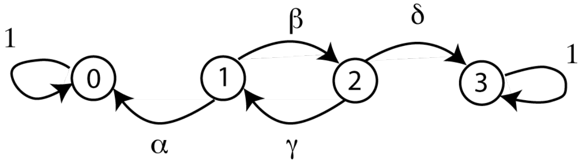
Notation : $a_{i,A} = P(X(n) \in A \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} | X(0) = i)$

Développement :

$$
\begin{aligned}
a_{i,A} &= P(X(n) \in A \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} | X_0 = i) \\
&= \sum_{j=0}^{m} P(X(n) \in A \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} | X_0 = i, X_1 = j). \\
&\quad .P(X_1 = j | X_0 = i) \\
&= \sum_{j=0}^{m} P(X(n) \in A \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} | X_1 = j) p_{ij} \\
&= \sum_{j=0}^{m} a_j p_{ij}
\end{aligned}
$$

Exemple

Chaîne de Markov à quatre états dont deux sont absorbants



Exemple (2)

Probabilité d'être absorbé par l'état 0 :

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= \sum_{j=0}^{3} p_{ij} a_j = p_{10} a_0 + p_{11} a_1 + p_{12} a_2 + p_{13} a_3 = \alpha + \beta a_2 \\
a_2 &= \sum_{j=0}^{3} p_{ij} a_j = p_{20} a_0 + p_{21} a_1 + p_{22} a_2 + p_{23} a_3 = \gamma a_1 \\
a_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Nous obtenons deux équations à deux inconnues, faciles à résoudre :

$$a_1 = \frac{\alpha}{1-\beta\gamma}, \ a_2 = \frac{\gamma\alpha}{1-\beta\gamma}$$

Exemple (3)

Probabilité d'être absorbé par l'état 3, même combat :

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= \sum_{j=0}^{3} p_{ij} a_j = \alpha a_0 + \beta a_2 = \beta a_2 \\
a_2 &= \sum_{j=0}^{3} p_{ij} a_j = \gamma a_1 + \delta a_3 = \gamma a_1 + \delta \\
a_3 &= 1
\end{aligned}
$$

$$a_1 = \frac{\beta\delta}{1-\beta\gamma}, \; a_2 = \frac{\delta}{1-\beta\gamma}$$

Temps moyen jusqu'à l'absorption

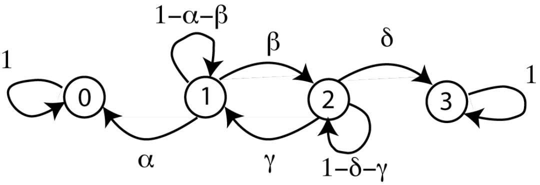
Calcul du temps moyen jusqu'à l'absorption

$$\begin{aligned}
\mu_i &= E[\text{nombre de transitions jusqu'à l'absorption,} \\
& \quad \text{en partant de } i] \\
&= E[\min\{n \geq 0 | X_n \text{est récurrent}\} | X_0 = i] \\
&= \mu_i = 1 + \sum_{j=0}^{m} p_{ij}\mu_j
\end{aligned}$$

Notes :

- Les états i de la formule sont tous transitoires.
- $\mu_i = 0$ si i est un état absorbant.

Exemple : Chaîne de Markov à quatre états dont deux sont absorbants

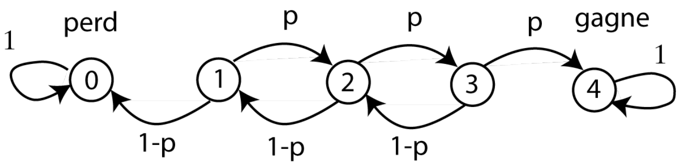


$$\mu_1 = \frac{\beta+\delta+\gamma}{(\delta+\gamma)(\alpha+\beta)-\gamma\beta}$$
$$\mu_2 = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{(\delta+\gamma)(\alpha+\beta)-\gamma\beta}$$

Application numérique : Avec $\alpha=\beta=\delta=\gamma=0.3$, on trouve que $\mu_1=\mu_2=10/3$

La ruine du joueur

Chaîne de Markov représentant le modèle de la "ruine du joueur", avec $m = 4$.



La ruine du joueur (2)

Graphe de $1 - a_i$ (probabilité de gagner) en fonction du gain m et du point de départ dans la chaîne de Markov, i, avec
$\rho = 0.52/0.48 = 1.0833$