Modélisation stochastique, Processus stochastiques

Stephan Robert, HEIG-Vd

6 octobre 2009

Rappel : Variables aléatoires

Exemple : Pièce de monnaie soit jetée trois fois.

$X(\omega)$: Nombre de faces.

$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP\}$

Pour chaque issue $\omega \in \Omega, X(\omega) \in \{0, 1, 2, 3\}$.

on a

- $X(\{PPP\}) = 0$
- $X(\{FPP\}) = X(\{PFP\}) = X(\{PPF\}) = 1$
- $X(\{FFP\}) = X(\{FPF\}) = X(\{PFF\}) = 2$
- $X(\{FFF\}) = 3$

Processus stochastiques

Variable aléatoire dépendant du temps : $X_t(\omega)$
Processus stochastique : $X = (X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$,

- **Discret** si $\mathbb{T} = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1,$
- **Continu** si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$

Remarque : Le processus peut être à "états discrets" ou à "états continus".

Notation d'un processus discret : $X = (X_n : n \in \mathbb{Z})$ ou $X = (X_n : n \in \mathbb{N})$

Exemple : Pièce de monnaie soit jetée n fois : Processus discret à états discrets.

Processus stochastiques (2)

Processus stochastique : $X = (X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$

Remarques :

- Si "t" ou "n" est fixé, Le processus stochastique est une **variable aléatoire**.
- Si $\omega \in \Omega$ est fixé, nous avons une **fonction du temps**.

Exemple processus stochastique discret

Processus de **Bernoulli** : $X = (X_n : n \in \mathbb{N})$ est une collection de variables aléatoires indépendantes avec $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = 0) = 1 - p$, $0 \leq p \leq 1$.

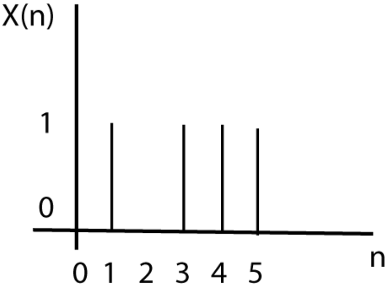


FIGURE: Séquence particulière d'un processus de Bernoulli

Exemples (2)

Remarque : L'espace fondamental doit être suffisamment grand ($\{0,1\}^N$ si $n = 0, 1, 2, ..., N$) pour comprendre toutes les séquences possibles car à chaque ω doit correspondre une séquence (par exemple 010111... comme montré à la figure précédente).

Exemple : $\{Y_n, n \geq 1\}$ indépendantes avec

- $P(Y_n = 1) = p$
- $P(Y_n = -1) = 1 - p$

Marche aléatoire ("**random walk**") :

$X = (X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i)$ avec $n \geq 1$

Espérance mathématique

Processus discret à états discrets :

$$E(X_n) = \mu_X(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i . P(X_n = x_i)$$

Processus discret à états continus :

$$E(X_n) = \mu_X(n) = \int_{-\infty}^{\infty} x . f_X(x, n) dx$$

Exemple

Marche aléatoire :

Nous avons

$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, n \geq 1,$

- $P(Y_n = 1) = p$
- $P(Y_n = -1) = 1 - p$

donc

$$E[X_n] = E[\sum_{i=1}^{n} Y_i] =$$
$$E[Y_1] + \ldots + E[Y_n] = n.E[Y_1] =$$
$$n(1 * p + (-1) * (1 - p)) =$$
$$n(2p - 1)$$

Corrélation

Fonction d'autocorrélation : Espérance mathématique du produit : $X_m X_n$

$$\boxed{R_{XX}(m,n) = R_X(m,n) = E[X_m.X_n] = E[X_n.X_m] = R_X(n,m)}$$

Corrélation (2)

Observations :

- $R_X(n,n) = E[X_n.X_n] = E[X_n^2] \geq 0$ si $n = m$.
- $E[X_n^2]$ représente la **puissance moyenne** de X_n (ou de X_m).
- Fonction de corrélation : $R_{XY}(m,n) = E[X_m Y_n]$

Exemple

Auto-corrélation d'une marche aléatoire

Nous avons $R_X(m,n) = E[X_m.X_n]$

En remplaçant les variables aléatoires $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=0}^{n} Y_i$, $Y_0 = 0$, nous trouvons

$$
\begin{aligned}
E[X_m.X_n] &= E[\sum_{i=0}^{m} Y_i.\sum_{j=0}^{n} Y_j] \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} E[Y_iY_j] \\
&= \sum_{i=0}^{\min(n,m)} E[Y_i^2] + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0,j\neq i}^{m} E[Y_i]E[Y_j]
\end{aligned}
$$

Exemple (2)

et comme

- $E[Y_k^2] = 1$
- $E[Y_k] = 2p - 1$

nous obtenons

$$\boxed{R_X(m,n) = \min(n,m) + [nm - \min(n,m)](2p-1)^2}$$

Covariance

Fonction d'autocovariance : Espérance mathématique du produit : $(X_m - \mu_X(m))(X_n - \mu_X(n))$

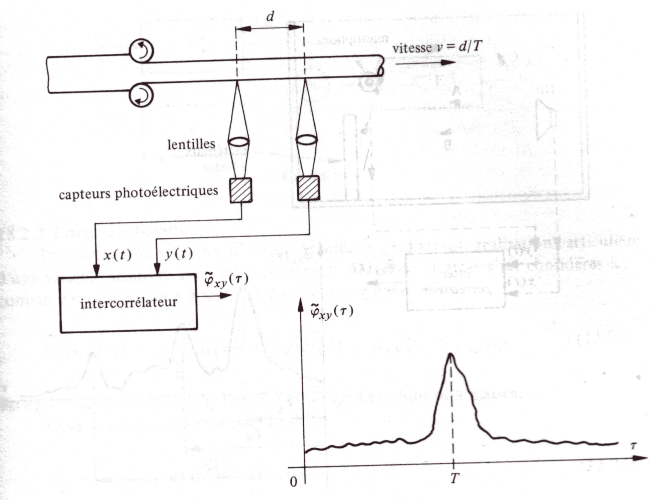
$$\boxed{Cov_{XX}(m,n) = Cov_X(m,n) = E[(X_m - \mu_X(m))(X_n - \mu_X(n))]}$$

Covariance (2)

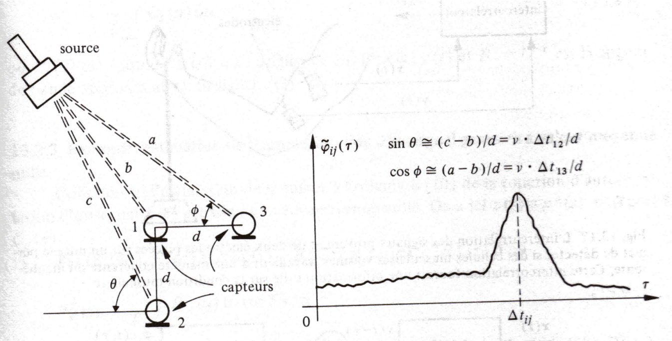
Observations :

- Lorsque $m = n$:
  $Cov_X(m,n) = E[(X_m - \mu_X(m))^2] = \mathbf{Var(X_m)}$
- Si $\mu_X(n) = \mu_X(m) = \mu_X$, alors
  $\mathbf{Cov_X(m,n) = R_X(m,n)} - \mu_{\mathbf{X}}^{\mathbf{2}}$
- $Cov_X(0) = \sigma_X^2$
- $R_X(0) = \sigma_X^2 + \mu_X^2$

Techniques de corrélation (1)

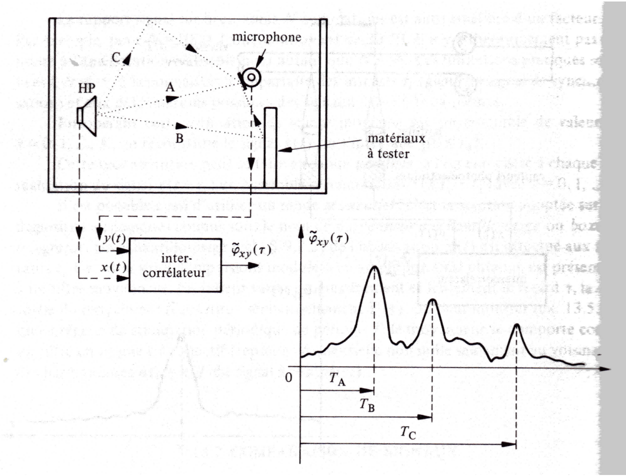


Techniques de corrélation (2)

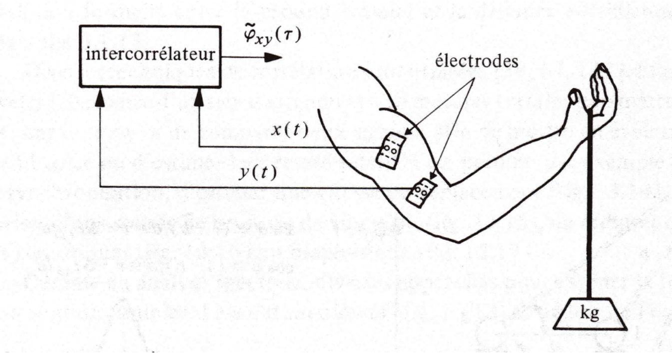


Techniques de corrélation (3)

- Outline
- Définitions
- Processus stochastiques discrets
- Processus stochastiques continus



Techniques de corrélation (4)



Exemples en mécanique et en sciences de l'environnement

- Réponse d'un building dans le sens du vent. Bien choisir le modèle pour le vent !

Exemples en mécanique et en sciences de l'environnement

- Réponse d'un building dans le sens du vent. Bien choisir le modèle pour le vent !
- Réponse d'un avion à la turbulence atmosphérique

Exemples en mécanique et en sciences de l'environnement

- Réponse d'un building dans le sens du vent. Bien choisir le modèle pour le vent !
- Réponse d'un avion à la turbulence atmosphérique
- Analyse spectrale d'accélérogrammes sismiques

Exemples en mécanique et en sciences de l'environnement

- Réponse d'un building dans le sens du vent. Bien choisir le modèle pour le vent !
- Réponse d'un avion à la turbulence atmosphérique
- Analyse spectrale d'accélérogrammes sismiques
- Ruine par fatique entraîné par des oscillations aléatoires

Exemples en mécanique et en sciences de l'environnement

- Réponse d'un building dans le sens du vent. Bien choisir le modèle pour le vent !
- Réponse d'un avion à la turbulence atmosphérique
- Analyse spectrale d'accélérogrammes sismiques
- Ruine par fatique entraîné par des oscillations aléatoires
- Fiabilité de systèmes avec différentes configurations

Exemples en mécanique et en sciences de l'environnement

- Réponse d'un building dans le sens du vent. Bien choisir le modèle pour le vent !
- Réponse d'un avion à la turbulence atmosphérique
- Analyse spectrale d'accélérogrammes sismiques
- Ruine par fatique entraîné par des oscillations aléatoires
- Fiabilité de systèmes avec différentes configurations
- Prédiction des tremblements de terre à partir de signaux bruités

Exemples en mécanique et en sciences de l'environnement

- Réponse d'un building dans le sens du vent. Bien choisir le modèle pour le vent !
- Réponse d'un avion à la turbulence atmosphérique
- Analyse spectrale d'accélérogrammes sismiques
- Ruine par fatique entraîné par des oscillations aléatoires
- Fiabilité de systèmes avec différentes configurations
- Prédiction des tremblements de terre à partir de signaux bruités
- Calcul de la hauteur maximale des vagues en plein océan durant une tempête

Exemples en mécanique et en sciences de l'environnement (2)

- Calcul de facteurs de charge pour des colonnes porteuses (bâtiments)

Références principales
Vibrations aléatoires et Analyse spectrale, A. Preumont, PPUR.
Probability and Statistics in Engineering, MIT Course.

Exemples en mécanique et en sciences de l'environnement (2)

- Calcul de facteurs de charge pour des colonnes porteuses (bâtiments)
- Mesure de l'élévation d'un satellite à l'aide de mesures bruitées

Références principales

Vibrations aléatoires et Analyse spectrale, A. Preumont, PPUR.
Probability and Statistics in Engineering, MIT Course.

Exemples en mécanique et en sciences de l'environnement (2)

- Calcul de facteurs de charge pour des colonnes porteuses (bâtiments)
- Mesure de l'élévation d'un satellite à l'aide de mesures bruitées
- Prédiction de températures journalières sur la base de plusieurs observations passées

Références principales
Vibrations aléatoires et Analyse spectrale, A. Preumont, PPUR.
Probability and Statistics in Engineering, MIT Course.

Exemples en mécanique et en sciences de l'environnement (2)

- Calcul de facteurs de charge pour des colonnes porteuses (bâtiments)
- Mesure de l'élévation d'un satellite à l'aide de mesures bruitées
- Prédiction de températures journalières sur la base de plusieurs observations passées
- Calculs de la stabilité des sols dans différents endroits du monde

Références principales

Vibrations aléatoires et Analyse spectrale, A. Preumont, PPUR.
Probability and Statistics in Engineering, MIT Course.

Exemples en mécanique et en sciences de l'environnement (2)

- Calcul de facteurs de charge pour des colonnes porteuses (bâtiments)
- Mesure de l'élévation d'un satellite à l'aide de mesures bruitées
- Prédiction de températures journalières sur la base de plusieurs observations passées
- Calculs de la stabilité des sols dans différents endroits du monde
- Influence d'El Nino sur la hauteur et le débit du Nil.

Références principales

Vibrations aléatoires et Analyse spectrale, A. Preumont, PPUR.
Probability and Statistics in Engineering, MIT Course.

Stationarité

Stationarité stricte :

$\{X_{n_1}, X_{n_2}, ..., X_{n_l}\}$ a la même distribution conjointe que

$\{X_{n_1+m}, X_{n_2+m}, ..., X_{n_l+m}\}$

Stationarité au sens large (Wide Sense Stationary : WSS) :

- $\mu_X(n) = E[X_n] = \mu_X$ (constante)
- $Var(X_n) = \sigma^2$ (constante)

Stationarité (2)

Implications :

- $R_X(m,n) = R_X(|\tau|)$
- $Cov_X(m,n) = R_X(|\tau|) - \mu_X^2$
- $R_X(0) = E[X_n^2]$
- $|R_X(\tau)| \leq |R_X(0)|$

Exemple

Soit un processus stochastique composé d'une séquence de variables aléatoires $X = (X_n : n \in \mathbb{Z})$ ayant une espérance mathématique nulle et une variance de 1.

$E[X(n)] = 0$ pour tout n.

La fonction d'auto-corrélation est donnée par $R_X(m,n) = E[X_m X_n] = E[X_m]E[X_n] = 0$ lorsque $|m-n| \neq 0$ et égale à $R_X(m,n) = E[X_m X_n] = E[X_m^2] = 1$ lorsque $m = n$.

Elle ne dépend que de $|m-n|$ donc **le processus est WSS.**

Exemple (2)

Soit un processus stochastique $X = (X_n : n \in \mathbb{N})$ composé de la somme d'un certain nombre de variables aléatoires Y_i, $i \geq 0$, iid, d'espérance mathématique nulle et de variance égale à 1, $Y_0 + Y_1 + ... + Y_n$.

Est-ce que ce processus est stationnaire au sens large ?

Le calcul de l'espérance mathématique du processus montre que $E[X_n] = E[Y_0] + E[Y_1] + ... + E[Y_n] = 0$.

La variance du processus $E[X_n^2] = 1 + 1 + ... + 1 = n$ donc **le processus n'est pas stationnaire au sens large.**

Ergodicité

Ergodicité : Soit un processus stochastique stationnaire $X = (X_n : n \in \mathbb{Z})$ au sens large avec $-m \leq n \leq m$ (par commodité). Alors il est ergodique si

$$\lim_{m \to \infty} \hat{\mu}_X(m) = E[X_n]$$

avec

$$\hat{\mu}_X(m) = \frac{1}{1+2m} \sum_{i=-m}^{m} X_i$$

Exemple

Processus stochastique : $X_n = A$, avec $E[A] = 0$, $Var(A) = 1$. Nous avons

$$E[X_n] = E[A] = 0.$$

Cependant, lorsque nous estimons la moyenne, nous trouvons que

$$\hat{\mu}_X(m) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{1+2m} \sum_{i=-m}^{m} A = A$$

Donc ce processus stochastique est **stationnaire sans être ergodique.**

Densité spectrale de puissance

Remarque : Un processus stochastique stationnaire au sens large X est un signal à énergie infinie et donc sa transformée de Fourier ne peut pas exister.

Conséquence : Pour trouver les caractéristiques spectrales d'un signal stochastique on va donc calculer la transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation

$$\boxed{S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k) e^{-j2\pi fk}}$$

Processus stochastiques

Variable aléatoire dépendant du temps : $X_t(\omega)$
Processus stochastique : $X = (X_t(\omega) : t \in \mathbb{T})$,

- **Discret** si $\mathbb{T} = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1,$
- **Continu** si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$

Remarque : Le processus peut être à "états discrets" ou à "états continus".

Notation d'un processus discret : $X = (X_n : n \in \mathbb{Z})$ ou $X = (X_n : n \in \mathbb{N})$

Exemple de processus stochastique continu

Soit un processus stochastique X tel que

$$\boxed{X_t = Y\cos(2\pi f_0 t)}$$

où

- Y est une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 1]$
- f_0 est une constante et $t \geq 0$.

Le processus stochastique est à **temps** et à **états continus**.

Espérance mathématique

Processus continu à états discrets :

$$E[X_t] = \mu_X(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i.P(X_t = x_i)$$

Processus continu à états continus :

$$E[X_t] = \mu_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f_X(x,t)dx$$

Exemple

Processus stochastique : $X_t = Y\cos(2\pi f_0 t)$ avec

- Y : variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 1]$
- f_0 : constante
- $t \geq 0$

L'espérance mathématique du processus stochastique est donnée par

$$\boxed{E[X_t] = E[Y\cos(2\pi f_0 t)] = E[Y]\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t)}$$

Exemple (2)

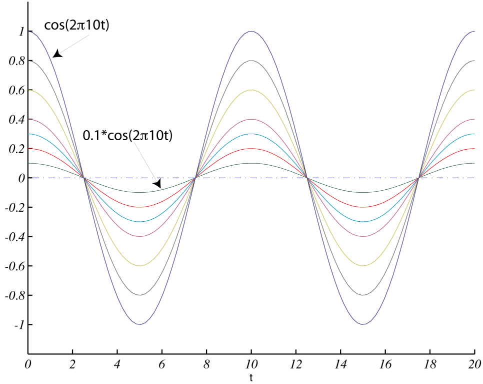


FIGURE: Réalisations de X_t en fonction du temps, avec $f_0 = 10$, pour différentes valeurs de Y

Corrélation

Fonction d'autocorrélation : Espérance mathématique du produit : $X_t X_s$

$$\boxed{R_{XX}(t,s) = R_X(t,s) = E[X_t X_s] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_t x_s f_{X_t,X_s}(x_t x_s)dt.ds}$$

MSE MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING

Corrélation (2)

Observations :

- $R_X(t,t) = E[X_t.X_t] = E[X_t^2] = E[s^2] \geq 0$ si $t = s$.
- $E[X_t^2]$ représente la **puissance moyenne** de X_n (ou de X_m).
- Fonction de corrélation : $R_{XY}(t,s) = E[X_tY_s]$

Exemple

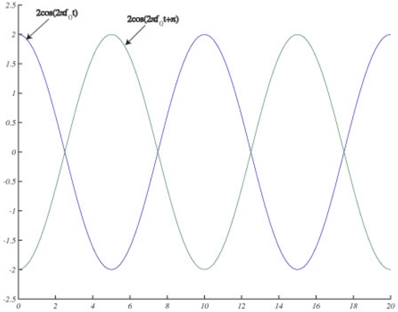
$$X_t = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

ϕ : **variable aléatoire** qui prend la valeur de 0 avec une **probabilité de** p et la valeur de π avec une **probabilité de** $1-p$.

Réalisations :

- $X_t = A\cos(2\pi f_0 t)$
  avec une probabilité p, $\phi = 0$.
- $X_t = A\cos(2\pi f_0 t + \pi) = -A\cos(2\pi f_0 t)$
  avec une probabilité $1-p$, $\phi = \pi$.

Exemple (2)



X_t pour $\phi = 0$ et pour $\phi = \pi$ en fonction du temps, avec $f_0 = 10$ et $A = 2$

Exemple (3)

La fonction d'**auto-corrélation** est égale à

$$\begin{aligned}
R_X(s,t) &= E[X_t X_s] \\
&= p.E[A\cos(2\pi f_0 t)A\cos(2\pi f_0 s)] + \\
&\quad (1-p)E[A\cos(2\pi f_0 t + \pi)A\cos(2\pi f_0 s + \pi)] \\
&= p.E[A^2\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 s)] + \\
&\quad (1-p)E[A^2\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 s)] \\
&= E[A^2\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 s)] \\
&= A^2.\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 s) \\
&= \frac{A^2}{2}[\cos(2\pi f_0(t+s)) + \cos(2\pi f_0(t-s))]
\end{aligned}$$

Covariance

Fonction d'autocovariance : Espérance mathématique du produit : $(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))$

$$\boxed{\begin{gathered} Cov_{XX}(t,s) = Cov_X(t,s) = \\ E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))] \end{gathered}}$$

Covariance (2)

Observations :

- Lorsque $t = s$: $Cov_X(t,s) = E[(X_t - \mu_X(t)]^2 = Var(X_t)$
- Si $\mu_X(t) = \mu_X(s)$, alors $Cov_X(m,n) = R_X(m,n) - \mu_X^2$
- $Cov_X(0) = \sigma_X^2$
- $R_X(0) = \sigma_X^2 + \mu_X^2$

Exemple

$$\boxed{X_t = Y\cos(2\pi f_0 t)}$$

Y est une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 1]$; f_0 est une constante et $t \geq 0$

Fonction d'**auto-corrélation** :

$$\begin{aligned} R_X(s,t) &= E[X_t X_s] = E[Y^2\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 s)] \\ &= E[Y^2]\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 s) \\ &= \frac{1}{3}\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 s) \end{aligned}$$

Exemple (2)

Fonction d'**auto-covariance** :

$$
\begin{aligned}
Cov_X(s,t) &= E[X_t X_s] - E[X_t]E[X_s] \\
&= \frac{1}{3}\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 s) - \\
&\quad -\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t)\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 s) \\
&= \frac{1}{12}\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0 s)
\end{aligned}
$$

Stationarité

Stationarité stricte :

$\{X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_l}\}$ a la même distribution conjointe que

$\{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_l+h}\}$

Stationarité au sens large (Wide Sense Stationary : WSS) :

- $\mu_X(t) = E[X_t] = \mu_X$ (constante)
- $Var(X_t) = \sigma^2$ (constante)

Stationarité (2)

Implications :

- $R_X(t,s) = R_X(|\tau|)$
- $Cov_X(t,s) = R_X(|\tau|) - \mu_X^2$
- $R_X(0) = E[X_t^2]$
- $|R_X(\tau)| \leq |R_X(0)|$

Ergodicité

Soit un processus stochastique $X = (X_t$ stationnaire au sens large, $-T \leq t \leq T$ (par commodité), alors il est ergodique en moyenne si :

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \hat{\mu}_x(T) = E[X_t]}$$

avec

$$\hat{\mu}_x(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_t dt$$

Densité spectrale de puissance

Remarque : Un processus stochastique stationnaire au sens large est un *signal à énergie infinie* et donc sa transformée de Fourier ne peut pas exister.

Conséquence : Pour trouver les caractéristiques spectrales d'un signal stochastique on va donc calculer la *transformée de Fourier de sa fonction d'auto-corrélation.*

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

Densité spectrale de puissance (2)

Fonction d'auto-corrélation :

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Relations de *Wiener-Khintchine (Einstein)*.

Propriétés :

1. $S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau$
2. $E[X^2(t)] = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$
3. $S_X(f) \geq 0$ pour tout f
4. $S_X(f) = S_X(-f)$
5. $p_X(f) = S_X(f) / \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$

Exemple

Fonction d'auto-corrélation (voir p.54 cours)

$$R_X(t,s) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0(t-s)) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$$

Notons $\delta(f)$ la fonction delta à $f = 0$. En prenant la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \frac{A^2}{4}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right) \end{aligned}$$

Application : Comparaison de différents modes transmission

Séquence de bits ....01001011101100l100...

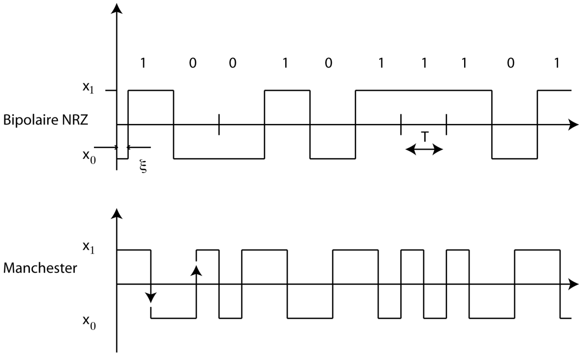


FIGURE: Modes de transmission NRZ et Manchester

Application : Comparaison de différents modes transmission (2)

Commençons par NRZ. La densité de probabilité d'un tel processus stochastique est donnée par

$$p_X(x) = P(X = x_0)\delta(x - x_0) + P(X = x_1)\delta(x - x_1)$$

avec $P(X = x_0) + P(X = x_1) = 1$. Une fois connue la densité, il est aisé de déduire l'espérance mathématique $E[X]$, ainsi que $E[X^2]$:

$$E[X] = x_0.P(X = x_0) + x_1.P(X = x_1) = \mu_X$$

$$E[X^2] = x_0^2.P(X = x_0) + x_1^2.P(X = x_1) = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$

Application : Comparaison de différents modes transmission (3)

On peut montrer (exercice) que la fonction d'auto-corrélation est égale à

$$R_X(\tau) = \sigma_X^2.(1 - |\tau|/T) + \mu_X^2 = \sigma_X^2.\text{tri}(\tau/T) + \mu_X^2$$

et que la densité spectrale de puissance est donnée par :

$$S_X(f) = \sigma_X^2.T\text{sinc}^2(fT) + \mu_X^2.\delta(f)$$

Application : Comparaison de différents modes transmission (4)

Manchester : Les symboles 0 et 1 sont représentés par une **transition** au milieu d'une période d'horloge. Un 1 est représenté par une transition du niveau haut au niveau bas et un 0 est représenté par une transition du niveau bas au niveau haut.

Après quelques calculs (exercice), nous trouvons la fonction d'auto-corrélation :

$$R_X(\tau) = A^2(2(1-2|\tau|/T) - ((1-2|\tau|/T))$$

et la densité spectrale de puissance est donnée par

$$S_X(\tau) = A^2T(\text{sinc}^2(fT/2) - \text{sinc}^2(fT))$$

Application : Comparaison de différents modes transmission (5)

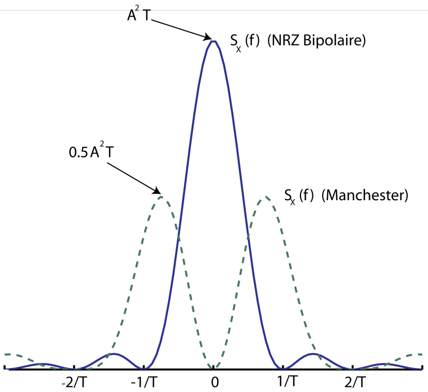


FIGURE: Densités spectrales de puissance pour les modes de transmission NRZ et Manchester. Les signaux sont anti-polaires et l'apparition des bits 0 et 1 est équiprobable.

Application : Comparaison de différents modes transmission (6)

Commentaires :

- Sur les **lignes traditionnelles**, il est souvent nécessaire **d'éviter une composante continue** pour éviter les couplages.
- **Manchester plus avantageux** mais prend plus de place dans le domaine fréquentiel.
- Le réseau **Ethernet** utilise le code de transmission de **Manchester**.