# Modélisation stochastique, Processus de Poisson et de Gauss

Stephan Robert, HEIG-Vd

3 novembre 2009

1 Processus de Bernoulli

2 Processus de Poisson

3 Processus de Gauss

4 “Suppléments”

# Processus de Bernoulli

# Processus de Bernoulli

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Le processus de Bernoulli est certainement le plus simple que nous pouvons imaginer : **séquence de jets de pièces** de monnaie.

- "0" : échec. Probabilité $= (1-p)$.
- "1" : succès. Probabilité $= p$.

Formellement : Séquence de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ avec

- $P(X_i = 0) = (1-p)$.
- $P(X_i = 1) = p$.

pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Remarque importante : Les variables aléatoires $X_i$ sont indépendantes les unes des autres !

# Processus de Bernoulli (2)



Le processus de Bernoulli est **SANS MEMOIRE** !

Les valeurs observées pour $X_1, X_2, ..., X_n$ sont complètement indépendantes des valeurs observées pour $X_m, X_{m+1}, ..., X_{m+n-1}$

- Question : Quelle est la distribution du temps avant d'obtenir un succès ("1") ?

# Processus de Bernoulli (2)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Le processus de Bernoulli est **SANS MEMOIRE** !

Les valeurs observées pour $X_1, X_2, ..., X_n$ sont complètement indépendantes des valeurs observées pour $X_m, X_{m+1}, ..., X_{m+n-1}$

- Question : Quelle est la distribution du temps avant d'obtenir un succès ("1") ?
- Réponse : Distribution géométrique de paramètre $p$.

$$p(T = n) = p(1-p)^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

# Processus de Bernoulli (3)



On défini un processus $Y_k$ tel qu'il représente les arrivées de "1".

Exemple : $Y_0 = 0$, $Y_1 = 5$, $Y_2 = 9$,...

**Interarrivées** : $T_k = Y_k - Y_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$

Les variables aléatoires $T_k$ sont distribuées selon une loi géométrique de paramètre $p$.

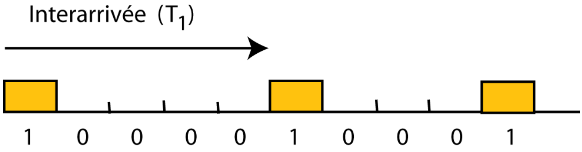
$$p(T_k = n) = p(1-p)^{n-1}, \; n = 1, 2, \ldots, \forall k = 1, 2, \ldots$$

**Processus sans mémoire** : Nous pouvons nous placer n'importe où dans le temps et la distribution est la même !

# Processus de Bernoulli (4)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Exemple de réalisation du processus de bernoulli




Espérance d'une variable aléatoire à distribution géométrique :

$$E[T] = \frac{1}{p}$$

Variance d'une variable aléatoire à distribution géométrique :

$$Var[T] = \frac{1-p}{p^2}$$

# Exercice : Transmission de paquets à travers un canal bruité

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

- **Exigence** : Probabilité d'erreur sur un paquet $< 10^{-4}$
- Probabilité d'erreur sur un bit : $p = 10^{-6}$
- **Question** : Quelle est la longueur maximale d'un paquet ?

# Exercice : Transmission de paquets à travers un canal bruité

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

- **Exigence** : Probabilité d'erreur sur un paquet $< 10^{-4}$
- Probabilité d'erreur sur un bit : $p = 10^{-6}$
- **Question** : Quelle est la longueur maximale d'un paquet ?

- **Réponse** :
  Prob que un bit arrive à destination sans erreur :
  $$1 - 10^{-6}$$
  Prob que deux bits arrivent à destination sans erreur :
  $$(1 - 10^{-6})^2$$
  Prob que $n$ bits arrivent à destination sans erreur :
  $$(1 - 10^{-6})^n$$

# Exemple : Transmission de paquets à travers un canal bruité (2)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Prob que $1$ bit soit erroné dans un paquet de longueur $n$ :

$$1-(1-10^{-6})^n$$

Il faut que

$$1-(1-10^{-6})^n < 10^{-4}$$

Donc

$$n < \frac{\ln(1-10^{-4})}{\ln(1-10^{-6})} = 100.005$$

# Processus de Bernoulli (5)

**Question** : Combien avons-nous de "succès" dans un intervalle donné ?

# Rappels d'analyse combinatoire

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

**Arrangement de $k$ objets différents parmi $n$**

Exemple : $k = 3$, $n = 4$

123 $\rightarrow$ 231$\rightarrow$ 312, (permutation cyclique ->), 132$\rightarrow$321$\rightarrow$213

124$\rightarrow$ 241$\rightarrow$ 412, (permutation cyclique ->), 142$\rightarrow$ 421$\rightarrow$ 214

234$\rightarrow$ 342$\rightarrow$ 423, (permutation cyclique ->), 243$\rightarrow$ 432$\rightarrow$ 324

134$\rightarrow$ 341$\rightarrow$ 413, (permutation cyclique ->), 143$\rightarrow$ 431$\rightarrow$ 314

$$A_n^k = A_4^3 = n(n-1)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} = 4.3.2 = 24$$

# Rappels d'analyse combinatoire (2)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

**Arrangement de $k$ objets différents parmi $k$ en tenant compte de l'ordre,**

**Cas particulier : $k$**

Exemple : $k = 3$

123 $\rightarrow$ 231$\rightarrow$ 312, (permutation cyclique ->), 132$\rightarrow$321$\rightarrow$213

$$A_k^k = A_3^3 = k(k-1)\dots(1)) = k! = 3.2.1 = 6$$

# Rappels d'analyse combinatoire (3)



## Nombre de permutations avec répétition

Exemple :

- $n = 3$ (3 éléments distincts dont on a autant d'exemplaire qu'on veut),
- $k = 2$ (groupes de deux éléments)

11 - 21 - 31

12 - 22 - 32

13 - 23 - 33

$$\boxed{n^k = 3^2 = 9}$$

# Rappels d'analyse combinatoire (4)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

**Combinaison de $k$ parmi $n$**

Exemple : $k = 3$, $n = 4$

$$C_n^k = \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{A_4^3}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

$$123/124/134/234$$

Combinaison de $k$ parmi $n$ =

$$\frac{\text{Nombre d'arrangements total de } n \text{ objets par groupes de } k}{\text{Nombre d'arrangements possible de } k \text{ objets}}$$

# Rappels d'analyse combinatoire (5)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

**En développant :**

$$
\begin{aligned}
C_n^k &= \frac{A_n^k}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots 2.1}{k!(n-k)(n-k-1)\dots 2.1} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}
\end{aligned}
$$

# Processus de Bernoulli, le retour

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Appliquons ce que nous venons de revoir au processus de Bernoulli pour répondre à la question "Combien de succès dans un intervalle donné ?

Exemple : Intervalle de longueur $n = 4$ ($n$ épreuves indépendantes)

$k = 0,\ C_4^0 = 1$ : 0000

$k = 1,\ C_4^1 = 4$ : 1000 - 0100 - 0010 - 0001,

$k = 2,\ C_4^2 = 6$ : 1100 - 1010 - 1001 - 0110 - 0101 - 0011

$k = 3,\ C_4^3 = 4$ : 1110 - 1101 - 1011 - 0111

$k = 4,\ C_4^4 = 1$ : 1111

# Processus de Bernoulli, le retour (2)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Nombre ($k$) de "1" apparus sur un intervalle de longueur $n$ :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

# Exercice

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Un dé est lancé 5 fois de suite. Quelle est la probabilité que le six sorte deux fois ?

# Processus de Poisson

# Processus de Poisson

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Problématique d'un processus discret :

- Quelle échelle de temps choisir ?

Un **processus de Poisson** peut être considéré comme la **version continue du processus de Bernoulli**.

## Implications

Distribution des **interarrivées**

- Discret :
  - $p(T = n) = p(1-p)^{n-1}$
  - $E[T] = 1/p$
  - $Var[T] = (1-p)/p^2$
- Continu :
  - $p(T > t) = e^{-\lambda t}$
  - $E[T] = 1/\lambda$
  - $Var[T] = 1/\lambda^2$

# Processus de Poisson (3)



## Implications (suite)

Distribution du **nombre de sollicitations** dans un intervalle

- Discret (intervalle de longueur $n$) :
  - $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
  - $E[X] = np$
  - $Var[X] = np(1-p)$
- Continu (intervalle de longueur $\tau$) :
  - $P(N(\tau)=n) = (\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}/n!$
  - $E[N(\tau)] = \lambda\tau$
  - $Var[N(\tau)] = \lambda\tau$

# Processus de Poisson (4)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

## Approche 1 : intuitive, approximations

Si

$$n \to \infty \qquad p \to 0 \qquad np \to \lambda$$

Alors

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Explications :

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k)(n-k-1)\dots 2.1}{(n-k)(n-k-1)\dots 2.1} \\ &= n(n-1)\dots(n-k+1) \end{aligned}$$

# Processus de Poisson (5)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Lorsque $n \gg k$ nous avons :

$$n(n-1)\dots(n-k+1) \approx n^k$$

et donc

$$\frac{n!}{(n-k)!} \quad \xrightarrow[n \gg k]{} \quad n^k$$

En remplaçant $\lambda = np$ nous trouvons l'approximation du transparent précédent.

# Processus de Poisson (6)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
“Suppléments”

## Approche 2 : Hypothèses

1. **Homogénéité :** $P(N(\tau) = n)$ est la même pour tous les intervalles de longueur $\tau$. Cette probabilité ne dépend que de $\tau$.
2. **Indépendance :** Le nombre de sollicitations dans un intervalle est indépendant du nombre de sollicitations dans les autres intervalles disjoints.
3. **Arrivées dans un petit intevalle** La probabilité de recevoir plus d'une sollicitation dans un petit intervalle de temps $\tau$ est négligeable.

# Processus de Poisson (7)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

**Sous forme mathématique :**

1. $N(0) = 0$. Si $s < \tau$ alors $N(s) \leq N(\tau)$
2. Si $s < \tau$ alors le nombre $N(\tau) - N(s)$ d'arrivées dans un intervalle $(s, \tau]$ est indépendant des arrrivées durant $(0, s]$.
3. $P[*] = P[N(\tau + \Delta\tau) = n + m | N(\tau) = n]$
   - $m > 1 : P[*] = o(\Delta\tau)$
   - $m = 1 : P[*] = \lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau)$
   - $m = 0 : P[*] = 1 - \lambda\Delta\tau + o(\Delta\tau)$

# Processus de Poisson (8)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Théorème des probabilités totales + hypothèses :

$P(N(\tau + \Delta\tau) = n) =$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} P[N(\tau) = i] P[N(\tau + \Delta\tau) = n | N(\tau) = i] \\
&= \sum_{i=0}^{n} P[N(\tau) = i] P[(n-i) \text{ arrivées dans } (\tau, \tau + \Delta\tau]] \\
&= P[N(\tau) = n-1] P[1 \text{ arrivée}] + P[N(\tau) = n] P[0 \text{ arrivée}] + o(\Delta\tau) \\
&= \lambda\Delta\tau P[N(\tau) = n-1] + (1 - \lambda\Delta\tau) P[N(\tau) = n] + o(\Delta\tau)
\end{aligned}
$$

# Equations de Kolmogorov

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Nous avons donc

$$\frac{P(N(\tau+\Delta\tau)=n)-P(N(\tau)=n)}{\Delta\tau} =$$

$$= \quad -\lambda P(N(\tau)=n)+\lambda P(N(\tau)=n-1)$$

et quand $\Delta\tau \to 0$, pour $n \geq 1$,

$$\frac{dP(N(\tau)=n)}{d\tau}(\tau) = -\lambda P(N(\tau)=n)+\lambda P(N(\tau)=n-1)$$

et pour $n=0$

$$\frac{dP(N(\tau)=0)}{d\tau}(\tau) = -\lambda P(N(\tau)=0)$$

# Equations de Kolmogorov (2)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Solution des équations différentielles :

$$P(N(\tau) = 0) = e^{-\lambda\tau}$$

avec la condition initiale $P(N(0) = 0) = 1$.

Pour $n = 1$, il suffit de remarquer que

$$P(N(\tau) = 1) = \lambda\tau e^{-\lambda\tau}$$

satisfait l'équation différentielle ci-dessus

$$\frac{dP(N(\tau) = 1)}{d\tau}(\tau) = -\lambda^2\tau e^{-\lambda\tau} + \lambda e^{-\lambda\tau}$$

Propriétés : $E(N(\tau)) = \lambda\tau$ et $Var(N(\tau)) = E[N^2(\tau)] - E^2[N(\tau)] = \lambda\tau$

# Poisson : Interarrivées

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Processus des **arrivées** : $Y_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$

**Interarrivées** :

$$\begin{aligned} T_1 &= Y_1 \\ T_2 &= Y_2 - Y_1 \\ \ldots & \\ T_k &= Y_k - Y_{k-1} \qquad k = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Processus de Poisson : SANS MEMOIRE

# Poisson : Interarrivées (2)



Calcul du **temps résiduel** :

$$\begin{aligned} P(T > t + s | T > t) &= \frac{P(T > t + s \cap T > t)}{P(T > t)} \\ &= \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} P(T > t + dt) &= P(T > t).(1 - \lambda dt) \\ P(T > t + dt) - P(T > t) &= P(T > t).(-\lambda dt) \\ \frac{dP(T > t)}{dt} &= -\lambda.P(T > t) \end{aligned}$$

# Poisson : Interarrivées (3)



En tenant compte que la condition initiale $P(T > 0) = 1$, il vient

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

La densité de probabilité se déduit très facilement :

$$-\frac{dP(T > t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} = f(t)$$

qui est bien la **distribution exponentielle**.

# Exercice

Un dispositif tombe régulièrement en panne, en moyenne une fois par an mais il est immédiatement remplacé dès qu'il tombe en panne.

- Quelle est la probabilité d'avoir plus de trois pannes en deux ans ?

# Processus de Gauss

# Processus Gaussien

**Définition** : Une processus stochastique $X(t)$ est dit **Gaussien** si les variables aléatoires $X_i = X(t_i)$, $i = 1, 2 \ldots, k$ sont des variables aléatoires conjointement gaussiennes.

Fonction de densité de deux variables aléatoires conjointement gaussiennes :

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2_{X,Y})}\left\{\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho_{X,Y}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right\}\right\}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{X,Y}}}$$

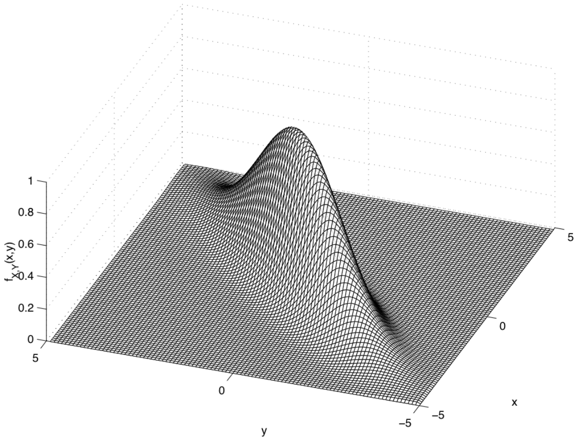
coefficient de corrélation :

$$\rho_{X,Y} = \frac{E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]}{\sigma_x\sigma_y}$$

# Processus Gaussien (2)



Densité conjointe de deux variables aléatoires Gaussiennes $X$ et $Y$



# Processus Gaussien (3)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

## Propriétés

- La somme de deux VA gaussienne est gausienne.
- VA conjointement gaussiennes : La **non-corrélation** entraîne l'**indépendance** :

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right\}\right\}}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right\} \\ &\quad \cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right\} \\ &= f_X(x)\cdot f_Y(y) \end{aligned}$$

# Vecteurs aléatoires Gaussiens

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Osons le pas suivant : **Vecteur aléatoire gaussien**

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

où les $X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sont des variables aléatoires conjointement gaussiennes.

La densité de probabilité d'un vecteur aléatoire gaussien est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{K}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^t\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

# Vecteurs aléatoires Gaussiens (2)

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Avec

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \\ \dots \\ E[X_n] \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov_X(X_1, X_2) & \dots & Cov_X(X_1, X_n) \\ Cov_X(X_2, X_1) & Var(X_2) & \dots & Cov_X(X_2, X_n) \\ . & . & . & . \\ Cov_X(X_n, X_1) & . & \dots & Var(X_n) \end{bmatrix}$$

**Remarque** : La covariance est une fonction paire, donc la matrice de covariance est symétrique.

# Le mouvement Brownien en un clin d'oeil



Le **mouvement Brownien** (ou **processus de Wiener**), de paramètre $\sigma^2$, est un processus stochastique $X_t$ (ou $B_t$) prenant des valeurs réelles satisfaisant :

- $X_0 = 0$
- Pour chaque $s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2 \leq \ldots \leq s_n \leq t_n$, les variables aléatoires $X_{t_i} - X_{s_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sont **indépendantes**.
- Pour chaque $s < t$, la variable aléatoire $X_t - X_s$ a une loi de distribution normale avec une espérance mathématique nulle ($E[X_t - X_s] = 0$) et une variance égale à $(t - s)\sigma^2$.
- Les trajectoires sont continues.

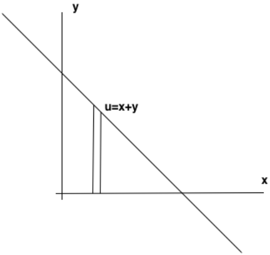
**Remarque :** Le mouvement Brownien $X_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma t)$ est en aucun point différentiable.

# Petits trucs supplémentaires

# Addition de deux variables aléatoires



$U = X + Y$




Fonction de répartition :

$$G(u) = \int\int_{x+y \leq u} f(x,y)dx.dy = \int_{x=-\infty}^{\infty} \left( \int_{y=-\infty}^{u-x} f(x,y)dy \right) dx$$

# Addition de deux variables aléatoires

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Fonction de densité : Dériver l'expression ci-dessus (G(u)) !

Rappel : **Règle de Leibniz** :

$$\frac{d}{dx}\int_{a_1(x)}^{a_2(x)} F(u,x)dx =$$

$$\int_{a_1(x)}^{a_2(x)} \frac{\partial F}{\partial x}du + F(a_2(x),x)\frac{da_2}{dx} - F(a_1(x),x)\frac{da_1}{dx}$$

# Addition de deux variables aléatoires (2)



Pour nous :

$$\begin{aligned}
\frac{dG(u)}{dx} &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left( \frac{d}{du} \int_{y=-\infty}^{u-x} f(x,y)dy \right) dx \\
g(u) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \left( \int_{y=-\infty}^{u-x} \frac{\partial f(x,y)}{\partial u} dy + 1.f(u-x,x) - 0.f(-\infty,x) \right) dx \\
g(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u-x,x)dx
\end{aligned}$$

Si les deux variables aléatoires sont indépendantes :

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u-x) f_2(x) dx = f_1 \star f_2$$

La fonction de densité de probabilité de la **somme de deux variables aléatoires indépendantes**, $u$, est donnée par **la convolution** des deux fonctions de densité de probabilités des variables aléatoires $f_1$ et $f_2$.

# Addition de deux variables aléatoires (3)



**Propriétés de l'intégrale de convolution :**

- $f_1 \star f_2 = f_2 \star f_1$
- $(f_1 \star f_2) \star f_3 = f_1 \star (f_2 \star f_3)$
- $f_1 \star (f_2 + f_3) = (f_1 \star f_2) + (f_1 \star f_3)$

# Exercice

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Convoluez "graphiquement" deux fonctions de densités uniformes

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

# Fonctions caractéristiques



Prenons l'espérance mathématique d'une fonction de la variable aléatoire $X$ :

$$\Phi(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x) dx$$

C'est la **fonction caractéristique** de la variable aléatoire $X$. Son utilité apparaît lors du calcul des moments ($E[X^i]$ avec $i = 1, 2, \ldots, n$).

# Fonctions caractéristiques (2)



Exemple avec une fonction de densité d'une loi gaussienne :

$$\Phi_X(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\omega x} dx = e^{j\mu\omega - \sigma^2\omega^2/2}$$

$$\frac{d\Phi_X(\omega)}{d\omega} = E[jXe^{j\omega X}]$$

$$\frac{d^2\Phi_X(\omega)}{d\omega^2} = E[j^2X^2e^{j\omega X}]$$

et de poser $\omega = 0$, ce qui donne

$$\frac{d\Phi_X(\omega)}{d\omega}|_0 = E[jX]$$

$$\frac{d^2\Phi_X(\omega)}{d\omega^2}|_0 = E[j^2X^2]$$

En généralisant nous trouvons que

$$E[X^n] = \frac{1}{j^n}\frac{d^n\Phi_X(\omega)}{d\omega^n}|_0$$

# Suite....

Outline
Processus de Bernoulli
Processus de Poisson
Processus de Gauss
"Suppléments"

Les trois semaines prochaines :

**Chaînes de Markov cachées**

avec M. Prêtre !