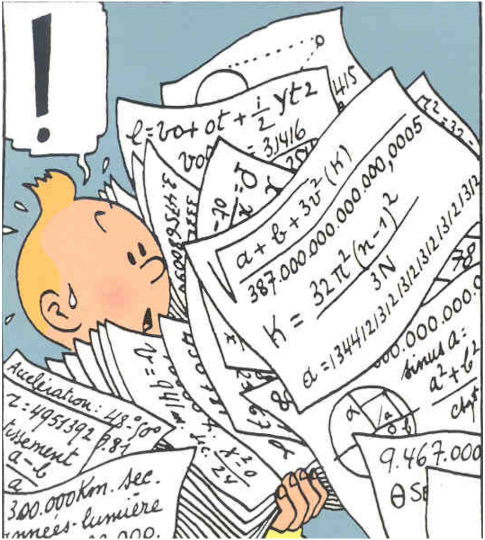
Cours de modélisation stochastique, Rappels

Stephan Robert, HEIG-Vd

12 octobre 2009

Introduction



Définitions

- **Expérience aléatoire :** Expérience dont le résultat n'est pas connu à l'avance.

Définitions

- **Expérience aléatoire :** Expérience dont le résultat n'est pas connu à l'avance.
- **Espace fondamental :** ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire.
  - Exemple 1 : Jet de dé : $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$.
  - Exemple 2 : Trois jets de pièces de monnaie : $\Omega = \{\{FFF\}, \{FFP\}, \{FPF\}, \{PFF\}, \{FPP\}, \{PFP\}, \{PPF\}, \{PPP\}\}$.

Définitions (2)

- **Evènement :** Ensemble d'issues possibles d'une expérience aléatoire. Sous-ensemble de Ω.
  - Exemple : expérience "jeter une pièce de monnaie deux fois", la collection des événements sera

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} \quad = \quad & \{\{\emptyset\}, \{FF\}, \{PP\}, \{FP\}, \{PF\}, \{FF, PP\}, \{FF, FP\}, \\
& \{FF, PF\}, \{PP, FP\}, \{PP, PF\}, \{FP, PF\}, \{FF, PP, FP \\
& \{FF, PP, PF\}, \{PP, FP, PF\}, \\
& \{FF, PP, FP, PF\}\}
\end{aligned}
$$

Evénements particuliers

- **Evénement impossible :** $\emptyset$ avec $\emptyset \subseteq \Omega$.

Evénements particuliers

- **Evénement impossible :** $\emptyset$ avec $\emptyset \subseteq \Omega$.
- **Evénement certain :** $\Omega \subseteq \Omega$.

Evénements particuliers

- **Evénement impossible :** $\emptyset$ avec $\emptyset \subseteq \Omega$.
- **Evénement certain :** $\Omega \subseteq \Omega$.
- **Evénement élémentaire :** $A = \{\omega\}$.

Evénements particuliers

- **Evénement impossible :** $\emptyset$ avec $\emptyset \subseteq \Omega$.
- **Evénement certain :** $\Omega \subseteq \Omega$.
- **Evénement élémentaire :** $A = \{\omega\}$.
- **Union d'événements :** $A \cup B$. L'événement "A **ou** B" sera réalisé si **au moins un** des deux événements a lieu.
  - Exemple : Jet d'un dé avec $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$.

Evénements particuliers (2)

- **Intersection d'évènements :** $A \cap B$ (événement "A **et** B"). L'événement "A **et** B" sera réalisé si **les deux** évènements ont lieu.
  - Exemple : Jet d'un dé avec $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$.

Evénements particuliers (2)

- **Intersection d'évènements :** $A \cap B$ (événement "A **et** B"). L'événement "A **et** B" sera réalisé si **les deux** évènements ont lieu.
  - Exemple : Jet d'un dé avec $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$.
- **Evènement comlémentaire :** L'événement complémentaire $\bar{A}$ ne sera réalisé que si A n'est pas réalisé.

Evénements particuliers (2)

- **Intersection d'évènements :** $A \cap B$ (événement "A **et** B"). L'événement "A **et** B" sera réalisé si **les deux** évènements ont lieu.
  - Exemple : Jet d'un dé avec $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{2, 4, 6\}$.
- **Evènement comlémentaire :** L'événement complémentaire $\bar{A}$ ne sera réalisé que si A n'est pas réalisé.
- **Remarque :** Deux événement sont *incompatibles* ou *exlusifs* si $A \cap B = \emptyset$.

Mesure de probabilité

Une loi de probabilité va **assigner** un nombre non-négatif $P(A)$ à chaque événement A de Ω de l'expérience aléatoire. Ce nombre satisfait les axiomes suivants :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$

Quelques observations

Nous pouvons voir que ...

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A) \leq 1$
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

Indépendance

Définition : L'événement A est *indépendant* de l'événement B si le fait de savoir que l'événement B s'est déroulé n'influence pas la probabilité de A.

Autrement dit : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Exemple : Jet de dé.

Ensembles fondamentaux à événements équiprobables

Dans de nombreuses expériences il est naturel d'admettre que chaque élément élémentaire de l'espace fondamental $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ a la même probabilité de se réaliser. Si l'espace fondamental est fini alors $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, et

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}}$$

Remarque : Le calcul de $P(A)$ revient à déterminer le nombre d'éléments de A et de Ω.

Ensembles fondamentaux à événements équiprobables (2)

Exemple : Reprenons l'expérience qui consiste à jeter trois pièces de monnaie.

- Nous savons que $\Omega = \{\{FFF\}, \{FFP\}, \{FPF\}, \{PFF\}, \{FPP\}, \{PFP\}, \{PPF\}, \{PPP\}\}$.
- Tous les événements sont équiprobables.
- La probabilité de chaque événement est de $1/8$.
- Si $A = \{\{FFP\}, \{FPF\}, \{PFF\}\}$, $P(A) = 3/8$. $P(A)$ est la probabilité d'obtenir deux faces lors du jet des trois pièces.

Probabilités conditionnelles

- Supposez que nous **connaissions** l'issue d'un événement $B \subset \Omega$. Etant donné cette information, quelle est la probabilité de l'évènement $A \subset \Omega$?

Probabilités conditionnelles

- Supposez que nous **connaissions** l'issue d'un événement $B \subset \Omega$. Etant donné cette information, quelle est la probabilité de l'évènement $A \subset \Omega$?
- Cette probabilité est écrite $P[A|B]$ et est lue **la probabilité conditionnelle de A étant donné B** , ou la probabilité de A étant donné B. Que vaut-elle ?

Probabilités conditionnelles

- Supposez que nous **connaissions** l'issue d'un événement $B \subset \Omega$. Etant donné cette information, quelle est la probabilité de l'évènement $A \subset \Omega$?
- Cette probabilité est écrite $P[A|B]$ et est lue **la probabilité conditionnelle de A étant donné B** , ou la probabilité de A étant donné B. Que vaut-elle ?
- L'issue doit être dans $A \cap B$ si on veut qu'elle soit dans A. On sait qu'elle est dans B. La probabilité de toutes les issues dans B doit être renormalisée pour donner 1 (ou diviser par $P(B)$)

Probabilités conditionnelles (2)

$$P(A|B) = \begin{cases} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, & \text{si } P(B) > 0 \\ 0, & \text{si } P(B) = 0. \end{cases}$$

Exemple :

- Choix d'une carte au hasard d'un jeu de cartes de 52 cartes. On admet que le jeu est parfaitement mélangé. Quelle est la probabilité que la carte tirée soit un as de trèfle si nous savons que la carte est noire ?

Probabilités conditionnelles (3)

Réponse :

- Soit A l'ensemble des as (4 cartes) et B l'ensemble des cartes noires (26 cartes).

Probabilités conditionnelles (3)

Réponse :

- Soit A l'ensemble des as (4 cartes) et B l'ensemble des cartes noires (26 cartes).
- $P[A|B] = P(A \cap B)/P(B) = 2/26$ avec $P(A \cap B) = 2/52$ (deux as noirs) et $P(B) = 26/52$ (26 cartes noires).

Probabilités conditionnelles (4)

- **Définition :** Soit un espace fondamental Ω. On appelle partition de Ω tout ensemble $H_1, H_2, \ldots, H_k$ de sous-ensembles 2 à 2 disjoints de Ω dont la réunion est dans Ω.

Probabilités conditionnelles (4)

- **Définition :** Soit un espace fondamental Ω. On appelle partition de Ω tout ensemble $H_1, H_2, \ldots, H_k$ de sous-ensembles 2 à 2 disjoints de Ω dont la réunion est dans Ω.
- **Théorème des probabilités totales :**

Soient un espace fondamental Ω, une partition de Ω et un événement A, alors :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1).P(H_1) + P(A|H_2).P(H_2) + \\ &+ \ldots + P(A|H_k).P(H_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A|H_k).P(H_k). \end{aligned}$$

Probabilités conditionnelles (5)

- **Théorème de Bayes**

Soient une partition $H_1, H_2, \ldots, H_k$, et un événement B d'un espace fondamental Ω, avec $P(B) \neq 0$ alors pour tout j, $1 \leq j \leq n$:

$$P(H_j|B) = \frac{P(H_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|H_j).P(H_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|H_k).P(H_k)}$$

Probabilités conditionnelles (6)

Remarques

Interprétons les événements H_j comme étant les états dans lesquels peuvent se trouver un système et B le résultat d'une expérience réalisée. Nous voulons savoir dans quels états le système se trouve.

- $P(H_j)$: Probabilité **à priori**. Opinion d'un observateur **avant** l'expérience.

Probabilités conditionnelles (6)

Remarques

Interprétons les événements H_j comme étant les états dans lesquels peuvent se trouver un système et B le résultat d'une expérience réalisée. Nous voulons savoir dans quels états le système se trouve.

- $P(H_j)$: Probabilité **à priori**. Opinion d'un observateur **avant** l'expérience.
- $P(B|H_j)$: Probabilité d'observer B si le système est dans l'état H_j

Probabilités conditionnelles (6)

Remarques

Interprétons les événements H_j comme étant les états dans lesquels peuvent se trouver un système et B le résultat d'une expérience réalisée. Nous voulons savoir dans quels états le système se trouve.

- $P(H_j)$: Probabilité **à priori**. Opinion d'un observateur **avant** l'expérience.
- $P(B|H_j)$: Probabilité d'observer B si le système est dans l'état H_j
- $P(H_j|B)$: Probabilité **à posteriori**. Opinion d'un observateur **après** l'expérience sachant que B a été réalisé.

Exercice : Filtre anti-spam

Les spams sont à l'heure actuelle un véritable fléau dans le monde informatique. Le 90% des messages envoyés sur le net sont des messages de spam. Un des outils les plus efficaces est le filtre baysien pour les combattre. On arrive à des taux de détection de 98%. Pour commencer on doit constituer une base de données de mots suspects (par exemple “viagra”) que nous allons numéroter de 1 à n. Ensuite on va pouvoir définir la probabilité que le mot numéro i apparaisse dans un message donné alors qu'on sait que ce dernier est du spam (p_i). On va également définir la probabilité que le mot numéro i apparaisse dans un message donné alors qu'on sait que ce dernier n'est pas du spam (q_i). Si nous recevons un message contenant le mot “miracle” (mot numéro 1). Quelle est la probabilité que ce message soit du spam si $p_1 = 0.05$ et $q_1 = 0.001$?

Probabilités conditionnelles (8)

Solution
Soit les événements :

- M_i : Le mot choisi au hasard dans le message électronique est le mot i.
- S_i : Le message électronique est un spam.

Déterminons les probabilités que nous connaissons :

- $p_1 = P(M_i|S) = 0.05$
- $q_1 = P(M_i|\overline{S}) = 0.001$

Probabilités conditionnelles (9)

Solution (suite)
Or nous savons que P(S)=0.9. Donc en appliquant le théorème de Bayes il vient :

$$P(S|M_1) = \frac{P(M_1|S).P(S)}{P(M_1|S).P(S)+P(M_1|\bar{S}).P(\bar{S})} = 0.998$$

Probabilités conditionnelles (10)

Remarques

- Le choix des mots et des signes est propre à l'utilisateur. Le filtre baysien s'adapte à chaque personne individuellement. On peut même imaginer que le filtre n'aura pas les mêmes caractéristiques pour plusieurs messageries de la même personne.
- Les mots peuvent sembler suspects dans un contexte mais pas dans un autre (exemple “prêt” pour un écolier ou pour une banque).
- La période d'apprentissage dure environ 15 jours pour déterminer les différentes probabilités.
- La plupart des fausses alarmes se manifestent au début de l'activité du filtre.
- Le filtre s'adapte constamment selon la syntaxe utilisée par les spameurs (exemple : “v-i-a-g-r-a” qui doit être intégré dans la base de données).

Variables aléatoires

Une variable aléatoire X est une application à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur l'espace fondamental Ω d'une expérience aléatoire :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Exemple

- Trois pièces de monnaie sont jetées. X égal le nombre de faces : $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \{0, 1, 2, 3\}$
- $P(\{X = 0\}) = P(\{PPP\}) = 1/8$
  $P(\{X = 1\}) = P(\{FPP\}, \{PFP\}, \{PPF\}) = 3/8$
  $P(\{X = 2\}) = P(\{FFP, FPF, PFF\}) = 3/8$
  $P(\{X = 3\}) = P(\{FFF\}) = 1/8$

Variables aléatoires discrètes

Définition : On appelle **variable aléatoire discrète** une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs dénombrables. Pour une variable aléatoire discrète X, on défini sa *distribution* ou *loi de probabilité* par

$$p(x_i) = P(X = x_i) \overset{not.}{=} P(\{\omega \mid X(\omega) = x_i\}), \quad i = 1, 2..., n$$

.

Il est clair que ces probabilités satisfont $P(X = x_i) \geq 0$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1.$$

Variables aléatoires discrètes (2)

Exemples :

- Tirage au sort à la loterie à numéro.
- Nombre d'ordinateurs vendus en un jour.
- Variable aléatoire de Bernoulli.
- Nombre de messages reçus en un jour par une personne de notre institution.

Fonction de répartition

Définition : La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire X est une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ donnée par

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

et qui a les propriétés suivantes :

1. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
2. Si $x < y$ alors $F_X(x) \leq F_X(y)$
3. F_X est continue à droite.

   Quand $y \rightarrow x$ et que $y \geq x$, $F_X(y) \rightarrow F_X(x)$

Fonction de répartition (2)

Remarques :

- Nous avons $\sum_i p(x_i) = 1$
- Pour une variable aléatoire discrète X, F_X est une fonction en “escalier” (continue à droite).
- Pour chaque valeur de x_i prise par X, F_X fait un bond de hauteur de $P(X = x_i)$.
- La fonction de répartition indique de quelle manière évoluent les probabilités lorsqu’on parcourt l’axe des réalisation de la variable aléatoire.

Espérance mathématique

Définition : Soient X une variable aléatoire discrète sur Ω et $P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$, la densité de X.
L'espérance mathématique de X, notée $E(X)$ ou μ_X, est un nombre réel défini par

$$\boxed{E(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^{n} x_i.P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i.p_i}$$

Remarque : Attention à ne pas confondre **moyenne** et **espérance mathématique**. Dans ce cours nous utilisons le premier terme (moyenne) pour indiquer la moyenne (variable aléatoire) des réalisations de plusieurs variables aléatoires. Le second terme est un nombre réel qui n'est pas aléatoire.

Espérance mathématique (2)

Exemple :
Dans l'exemple d'une **source d'information**, quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire représentant la longueur d'un code ? X est la variable aléatoire qui dénote la longueur du code en bits et que $P(X=1)=p_1=0.5$, $P(X=2)=p_2=0.25$, $P(X=3)=p_3=0.25$. Donc l'espérance se calcule comme suit :

$$E[X]=\sum_{i=1}^{3} i.p_i = 1*0.5+2*0.25+3*0.25=1.75$$

Variance, écart type

Définition : Soient X une variable aléatoire discrète sur Ω et $P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$, la densité de X. La variance de X, notée $Var(X)$, $\sigma^2(X)$ ou σ_X^2 est le nombre réel positif défini par :

$$\boxed{Var(X) = \sigma^2(X) = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - E[X])^2.p_i}$$

Variance, écart type (2)

Remarques :

- L'écart-type est un paramètre de dispersion et a les mêmes unités que la variable aléatoire : $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.
- La variance et l'écart-type sont les nombres réels positifs pas (pas aléatoires !)
- La variance peut s'écrire : $Var(X) = E[X^2] - E^2[X]$ avec $E[X^2] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . p_i$

Exemple : Loi uniforme discrète

La densité de probabilité uniforme discrète sur $\Omega = \{a, a+1, \ldots, b\}$ est définie par

$$\boxed{P(X = x) = p_X(x) = \frac{1}{b-a}}$$

quand $a \leq x \leq b$ avec $a < b$, $P(X = x) = 0$ ailleurs. La fonction de répartition correspondante est donnée par

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ (x-a)/(b-a) & \text{si} \quad a < x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b. \end{cases}$$

Exemple : Loi uniforme discrète (2)

- Espérance mathématique : $\mu_X = E(X) = (a+b)/2$
- Variance : σ_X^2=Var(X)=$(b-a)^2/12$

Exemple : Loi de Bernoulli

Nous faisons une expérience dont l'issue est classifiée comme étant un "succès" ou un "échec". Nous définissons la variable aléatoire X sur $\Omega = \{\text{succès}, \text{échec}\}$ en fixant :

- un paramètre : p.
- $X(\text{ succès }) = 1$ et $X(\text{ échec }) = 0$
- La densité ou loi de probabilité est donnée par :

$$\boxed{P(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1 - p & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

- $E[X] = p$, $Var(X) = p(1-p)$

Exemple : Loi binomiale

Dans le cadre de cette expérience aléatoire, n épreuves indépendantes de Bernoulli se réalisent. Chacune d'elle a un probabilité de succès p. On défini la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès sur l'ensemble des n épreuves.

- Deux paramètres : n et p.
- La densité ou loi de probabilité est donnée par :

$$\boxed{P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = C(n,x) p^x (1-p)^{n-x}}$$

pour $x = 0, 1, \ldots, n$ et $C(n,x) := \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$

Exemple : Loi binômiale (2)

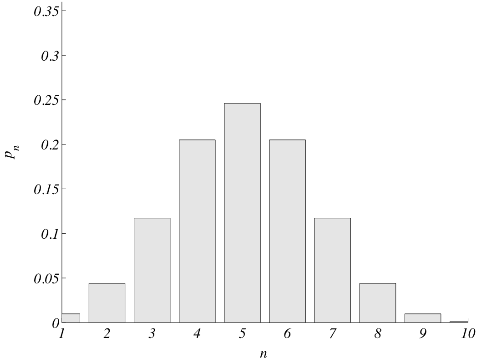


FIGURE: Loi de probabilité d'une variable aléatoire Binômiale avec $n = 10$ et $p = 0.5$

Exemple : Loi binômiale (3)

- Espérance mathématique :

$$\mu_X = E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} = np$$

- Variance : $\sigma_X^2 =$Var(X)=$np(1-p)$
- Remarque : En posant $n = 1$ nous obtenons une loi géométrique.

Exemple : Loi géométrique

Dans cette expérience aléatoire, on répète des épreuves de Bernoulli, chacune ayant une probabilité de succès p. Désignons par X le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès.

- un paramètre : p
- Densité ou loi de probabilité :

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}, \; x = 1, 2, 3, \ldots$$

Exemple : Loi géométrique (2)

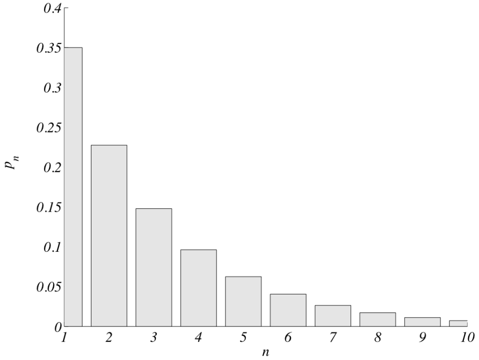


FIGURE: loi de probabilité d'une variable aléatoire géométrique avec $p = 0.35$

Exemple : Loi géométrique (3)

- Espérance mathématique :
  $\mu_X = E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p}$
- Variance : $\sigma_X^2 =$Var(X)=$\frac{1-p}{p^2}$

Exemple : Loi de Poisson

- un paramètre : $\lambda > 0$

$$\boxed{P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \text{ for } i \geq 0.}$$

- Espérance mathématique : $\mu_X = E[X] = \lambda$
- Variance : $\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E[X^2] - E^2[X] = \lambda$

Exemple : Loi de Poisson (2)

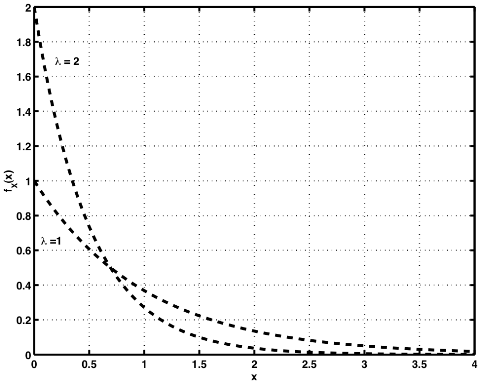


FIGURE: Loi de probabilité d'une variable aléatoire de Poisson

Exemple : Loi de Poisson (3)

Remarques

- Approximation de la loi binomiale avec la loi de Poisson lorsque n est grand et o petit. Une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = np$ peut être utilisée pour approximer une loi binomiale de paramètres n et p.
- Modélisation avec une loi de Poisson : nombre de pièces défectueuses dans une livraison, nombre d'appels téléphoniques durant une heure déterminée,...
- Autres loi discrètes : Loi hypergéométrique, loi multinomiale, loi binomiale négative, ...

Variables aléatoires continues

Définition : On appelle **variable aléatoire continue** une variable aléatoire qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle (intervalle borné, une demi-droite ou $\mathbb{R}$ tout entier).

Conséquence : Tous les points ont une probabilité nulle !

Définition : X est une variable aléatoire continue s'il existe une fonction f_X non négative telle que

$$P(X \in A) = \int_A f_X(u)du$$

où A est un ensemble de nombre réels (par exemple un intervalle). La fonction f_X est appelée la *fonction de densité de probabilité* de X. On remplace souvent f_X par f s'il n'y a aucune ambiguité.

Variables aléatoires continues (2)

Remarques

- Comme les probabilités ponctuelles sont nulles, on considère un intervalle pour calculer la probabilité : $P(a < X \leq b)$.
- En pratique ça signifie que nous sommes intéressés par un intervalle dans lequel une tolérance d'erreur est admise par exemple.
- La fonction de densité nous indique la manière dont la masse de probabilité est répartie dans un intervalle. La densité de probabilité remplace les probabilités ponctuelles (qu'on appelle aussi "masses de probabilité").

Variables aléatoires continues (3)

Propriétés de la fonction de densité

1. $P(X \in]-\infty, \infty[) = \int f_X(u)du = 1$
2. $P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(u)du$
3. $P(X = a) = 0\,!$
4. $f_X(u) \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}$

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire continue est analogue à celle d'une variable aléatoire discrète.

Définition La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire continue X est définie par :

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du}$$

- F_X est une **fonction continue** dans $[0, 1]$ et est monotone non décroissante.
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- $F'_X(x) = f_X(x)$
- $P(a < x \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Espérance mathématique

L'espérance mathématique de la variable aléatoire continue est semblable à celle d'une variable discrète. La densité de probabilité remplace les probabilités ponctuelles (qu'on appelle aussi "masses de probabilité").

Définition Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X. L'**espérance mathématique** de X est le nombre réel noté $E[X]$ ou μ_X défini par

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} u.f_X(u)du$$

Propriétés de l'espérance mathématique

Soient X une variable aléatoire, a et b deux constantes réelles.

- $E[b] = b$
- $E[X + b] = E[X] + b$
- $E[a.X + b] = a.E[X] + b$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Fonction d'une variable aléatoire

Soit une variable aléatoire X et une fonction g. Quelle est la loi de distribution de la nouvelle variable aléatoire

$$Y = g(X)$$

en admettant que nous connaissions celle de X ?

Réponse "partielle" : Lorsque g est continue monotone croissante ou décroissante, la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire Y, $f_Y(y)$ est donnée par

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X(g^{-1}(y))\left|\frac{d(g^{-1}(y))}{dy}\right|}$$

Exemple : $Y = aX + b$

Soit une variable aléatoire X uniformément distribuée entre 0 et 1 et $Y = g(X) = aX + b$.

Nous trouvons d'abord que

$$f_X(g^{-1}(y)) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

et ensuite

$$\left|\frac{d(g^{-1}(y))}{dy}\right| = \left|\frac{1}{a}\right|$$

et donc

$$f_Y(y) = \left|\frac{1}{a}\right| f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Exemple (2)

Nous connaissons la fonction de densité de X :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

en remplaçant dans la formule que nous venons de trouver, nous avons la fonction de densité de la variable aléatoire Y :

$\underline{a > 0}$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/|a| & \text{si} \quad b < y < a + b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\underline{a < 0}$:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/|a| & \text{si} \quad a + b < y < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Fonction d'une variable aléatoire (2)

Question : Que fait-on quand la fonction g n'est pas monotone et continue ?

Réponse : La fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire Y, $f_Y(y)$ est donnée par

$$\boxed{f_Y(y) = \sum_k f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| |_{x=x_k}}$$

Si $y = g(x)$ a n solutions, la somme comprendra n termes.

Exemple : $Y = X^2$

- Soit une variable aléatoire X **uniformément distribuée** entre -1 et 1 et $Y = X^2$. Quelle est la fonction de densité de probabilité de Y ?
- Remarquons que l'équation $y = g(x)$ a 2 solutions ($x_0 = \sqrt{y}$ et $x_1 = -\sqrt{y}$). Donc la fonction de densité comporte deux termes.
- Nous savons que $dy/dx = 2x$ donc $dx/dy = 1/2x$ et

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| |_{x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{dx}{dy}\right| |_{x=x_1} = \frac{-1}{2\sqrt{y}}$$

- Donc

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(\sqrt{-y})}{2\sqrt{y}}$$

Exemple (2)

Nous connaissons la fonction de densité de X :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

en remplaçant dans la formule que nous venons de trouver, nous avons la fonction de densité de la variable aléatoire Y :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si} \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple : $Y = cos(X)$

- Soit une variable aléatoire X uniformément distribuée entre 0 et 2π et $Y = \cos(X)$. Quelle est la fonction de densité de probabilité de Y ?
- Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ il y a deux solutions pour $y = g(x)$: $x_0 = \arccos(y)$ et $x_1 = 2\pi - \arccos(y)$
- Nous savons que $dy/dx = -\sin(x)$ et que $\sin(x) = -\sin(2\pi - x)$.
- De plus $\sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}$. Pour le voir posons $a = \arccos(b)$. Avec $\sin^2(a) + \cos^2(b) = 1 = \sin^2(a) + b^2$, il vient $\sin(\arccos(b)) = \sqrt{1-b^2}$.

Exemple (2)

Outline
Rappel des concepts
Mesure de probabilité
Indépendance
Probabilités condition-nelles
Variables aléatoires

- Donc

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = -\sin(x_0) = -\sin(\arccos(y)) = -\sqrt{1-y^2}$$

et

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_1} = -\sin(x_1) = \sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}$$

- Finalement, pour $-1 < y < 1$,

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\arccos(y))}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{f_X(2\pi - \arccos(y))}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

Espérance mathématique d'une fonction de variable aléatoire

Soit une variable aléatoire $Y = g(X)$, fonction d'une autre variable aléatoire X. il y a **deux manières** de calculer l'espérance mathématique :

1. $E[Y] = \int_{\infty}^{\infty} y.f_Y(y)dy$
2. $E[Y] = E[g(X)] = \int_{\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$

Remarque : La première manière est la façon "standard" de calculer l'espérance mais il faut connaître la distribution de Y !

Exemple 1

Soit $Y = e^X$ et X distribué uniformément sur $[0, 1]$.

1.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{si} \quad 1 < y < e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$E[Y] = \int_{\infty}^{\infty} y.f_Y(y)dy = \int_{1}^{e} dy = e - 1$$

2.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$E[Y] = \int_{\infty}^{\infty} e^x f_X(x)dx = \int_{0}^{1} e^x dx = e - 1$$

Exemple 2

Soit $Y = a\cos(\omega t + \Theta)$, avec Θ distribué uniformément dans $[0, 2\pi]$ alors en utilisant la deuxième méthode il est facile de calculer $E[Y]$:

$$E[X] = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} a\cos(\omega t + \Theta) d\Theta = -\frac{a}{2\pi} \sin(\omega t + \theta) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{a}{2\pi} \sin(\omega t + 2\pi) + \frac{a}{2\pi} \sin(\omega t + 0) = 0$$

car $\sin(\omega t) = \sin(\omega t + 2\pi)$.

Variance, écart-type

La variance et l'écart-type de la variable aléatoire continue sont similaires à celles d'une variable discrète.

Définition Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X. La **variance** de X est le nombre réel positif noté $Var[X]$ ou σ_X^2 défini par

$$\boxed{Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (u - E[X])^2 f_X(u) du}$$

L'**écart-type** est égale à la racine carrée de la variance.

Propriétés de l'espérance mathématique

Soient X une variable aléatoire, a et b deux constantes réelles.

- $Var(b) = 0$
- $Var[X + b] = Var[X]$
- $Var[a.X] = a^2.Var[X]$
- $Var[a.X + b] = a^2.Var[X]$

Exemple : Loi uniforme continue

La densité de la loi de probabilité uniforme continue sur $\Omega = [a, b]$ est définie par

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{b-a}}$$

quand $a \leq x \leq b$ avec $a < b$, $f_X(x) = 0$ ailleurs. La fonction de répartition correspondante est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ (x-a)/(b-a) & \text{si} \quad a < x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b. \end{cases}$$

$E[X] = (a+b)/2$, $Var(X) = (b-a)^2/12$

Exemple : Loi exponentielle

- Un paramètre : λ $(\lambda > 0)$
- Fonction de densité

$$\boxed{f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ pour } x \geq 0, \text{ nulle ailleurs}}$$

- Fonction de répartition

$$\boxed{F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ pour } x \geq 0, \text{ nulle ailleurs}}$$

- $E[X] = 1/\lambda$, $Var[X] = 1/\lambda^2$.

Exemple : Loi exponentielle (2)

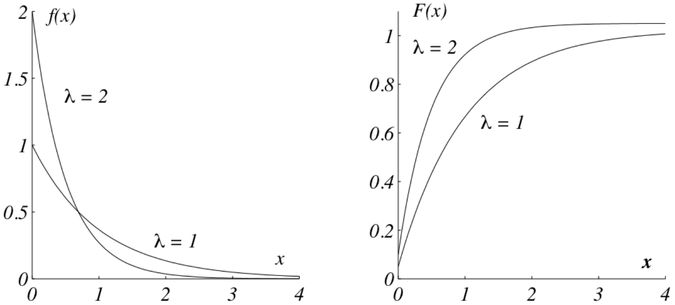


FIGURE: Densité et fonction de répartition d'une variable aléatoire exponentielle

Exemple : Loi Gaussienne (ou Normale)

- Deux paramètres : μ et $\sigma^2 > 0$.
- Fonction de densité

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma)}}$$

- Fonction de répartition

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u-\mu)^2/(2\sigma)} du}$$

- $E[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$.

Exemple : Loi Gaussienne (2)

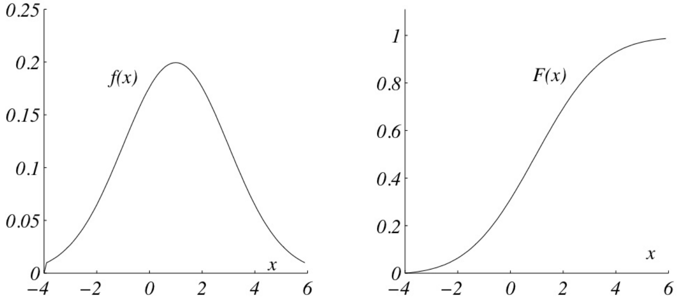


FIGURE: Densité et fonction de répartition d'une variable aléatoire Gaussienne (ou Normale) avec $\mu = 1$ et $\sigma = 2$

Exemple : Loi Gaussienne (3)

Remarques

- Changement de μ : Déplacement de la courbe de densité de probabilité le long de l'abscisse.
- Changement de σ : Etirement et applatissement de la courbe de densité de probabilité.
- Si X est une variable aléatoire gaussienne, sa réalisation a une probabilité de
  - 68% de se trouver dans l'intervalle $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
  - 95% de se trouver dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
  - 99.7% de se trouver dans l'intervalle $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Exemple : Loi Normale réduite

La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ a une fonction de densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, -\infty < x < \infty$$

et une fonction de répartition

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du, -\infty < x < \infty.$$

Exemple : Loi Gaussienne (4)

La loi normale réduite est la distribution de référence (tables existantes). Toute probabilité sur un intervalle d'une variable aléatoire normale quelconque peut être calculée à l'aide de cette distribution en effectuant la transformation suivante :

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

lorsque la variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Exemple : Lois continues

Autres exemples de lois de probabilités continues : Cauchy, Rayleigh, Pareto, Gamma, Beta, Khi-carré, Student, Weibull,...

Loi des grands nombres

Théorème Soit une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $X_1, X_2, \ldots, X_n$ avec $E[X_i] = \mu$. Alors avec une probabilité de 1,

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \rightarrow \mu$$

quand $n \rightarrow \infty$

Théorème central limite

Théorème. Soient X_1, X_2, ...une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec $E(X_i) = \mu$ et $Var(X_i) = \sigma^2$. Alors la distribution de

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge vers une loi normale réduite quand $n \to \infty$. Ceci étant,

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx, \quad n \to \infty$$

Notez bien que ce résultat est valable pour n'importe quelle distribution ayant une espérance mathématique et une variance définies.