MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING

Modélisation stochastique, Files d'attente

Stephan Robert, HEIG-Vd

30 novembre 2009

Introduction

Représentation d'une **file d'attente** simple

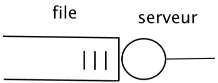
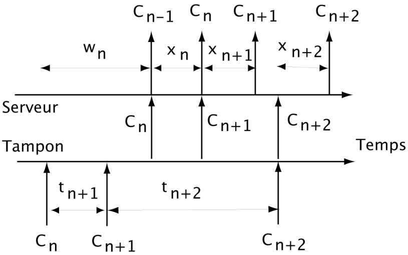
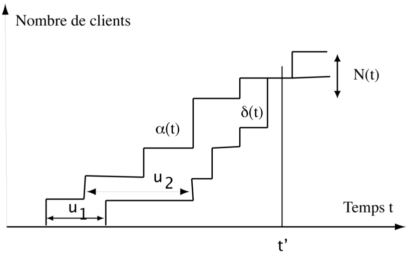


Diagramme temporel



Question : Quelle est la relation entre le **temps d'attente moyen** et le **nombre de clients** dans le système ?



$$\hat{T}_t = \frac{\sum_{i=0}^{\alpha(t)} u_i}{\alpha(t)}$$

Introduction (3)

Nombre moyen de clients dans la file d'attente :

$$\hat{N}_t = \frac{\int_0^t N(\tau)d\tau}{t} = \frac{\sum_{i=0}^{\alpha(t)} u_i}{t}$$

ce qui signifie

$$\hat{N}_t = \hat{\lambda}_t \hat{T}_t$$

Si le système est ergodique, nous obtenons la

LOI DE LITTLE :

$$E[N] = \lambda E[T]$$

Notation

Fonctions de répartition

- Interarrivées : $A(t)$
- Temps de service : $B(x)$

Caractérisation d'une file d'attente (**Notation de Kendall**)

A/B/s/K/DS

Exemples : M/M/1, G/G/3/K

Exercice 1

Files d'attente élémentaires

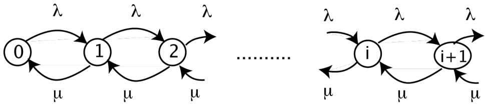
Files d'attente élémentaires

Généralités

- **Temps d'interarrivées** : $E[T] = 1/\lambda$
  - λ : Taux d'arrivées moyen.
- **Temps de service** : $E[S] = 1/\mu$
  - μ : Taux de service moyen par serveur.
- $N(t)$: Nombre de clients dans le système au temps t.

File M/M/1

Représentation de la file d'attente M/M/1 (Processus de naissance et de mort) :



avec les paramètres suivants :

$$\lambda_k = \lambda \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$\mu_k = \mu \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

File M/M/1 (2)

Remarques :

- Les interarrivées sont distribuées exponentiellement $(E[T] = 1/\lambda)$
- Les temps de service sont distribués exponentiellement $(E[S] = 1/\mu)$
- La file ne comporte qu'un serveur et est de longueur infinie
- Discipline de service : FIFO.
- **Intensité du trafic** : $\rho = \lambda/\mu$
- La chaîne de Markov est ergodique si $\rho < 1$

File M/M/1 (3)

Probabilité d'état π_0 (voir le cours au chapitre 6, p. 108) :

$$\pi_i = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = \pi_0 \rho^i$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$$

mais

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}}$$

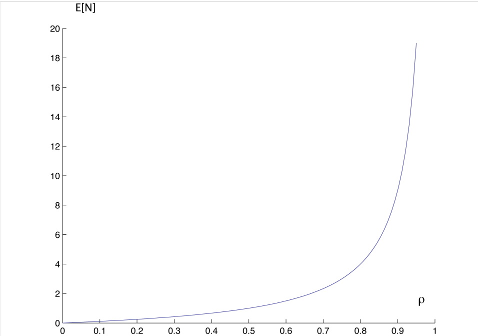
Ainsi

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

Caractéristiques de la file M/M/1

- Espérance mathématique du nombre de clients dans la file

$$E[N] = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i = (1-\rho) \sum_{i=0}^{\infty} i \rho^i = \ldots = \frac{\rho}{1-\rho}$$



File M/M/1 (3)

Caractéristiques de la file M/M/1 (suite)

- Avec la formule de Little :

$$E[T] = \frac{E[N]}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

- Variance du nombre de clients en fonction de l'intensité du trafic :

$$\sigma_N^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Exemple : Serveur de bases de données

Une entreprise effectue des mesures sur son serveur de base de donnée :

- taux moyen d'arrivées : 30 requêtes/seconde
- temps moyen de service : 20 ms

Question : A partir de quelle charge faut-il augmenter la vitesse du processeur pour maintenir un **service de même qualité** ? Si la firme augmente la charge du serveur de 40% par exemple, de combien doit augmenter la vitesse du processeur ?

Serveur de bases de données (2)

Réponse : Modèle : M/M/1.

- Taux de traitement de requêtes : $\mu = \frac{1}{20.10^{-3}} = 50$ requêtes/seconde
- Taux d'utilisation du serveur : $\rho = \lambda/\mu = 30/50 = 0.6 = 60\%$
- Temps de traitement (à garder constant !) : $E[T] = \frac{1/\mu}{1-\rho} = \frac{1/50}{1-0.6} = 50$ ms

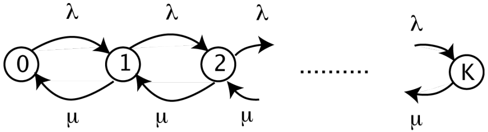
Le nombre de requêtes s'accroît de 40% :

- $\lambda' = 30 + 30 \cdot 0.4 = 42$
- $\rho' = \lambda'/\mu = 42/50 = 0.6 = 84\%$

Si nous voulons que $E[T] = 50$ ms $= \frac{1/\mu'}{1-\rho'}$, $\mu' = 62$ requêtes/seconde.
Donc le processeur devra **augmenter sa vitesse** de
$(62 - 50)/50 = 0.24 = 24\%$

File M/M/1/K

Différence avec la file M/M/1 : Limitation du nombre de places dans le système (serveur + tampon).



Nous connaissons les probabilités d'état en fonction de π_0 (processus de naissance et de mort) :

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \qquad \text{pour } k \leq K$$

File M/M/1/K (2)

D'autre part,

$$\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_K = 1$$

ce qui donne

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right] = \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}$$

Espérance mathématique du nombre de clients dans le système

$$E[N] \quad = \quad L = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{1 - (K+1)(\lambda/\mu)^K + K(\lambda/\mu)^{K+1}}{(1 - \lambda/\mu)(1 - (\lambda/\mu)^{K+1})}$$

Taux moyen d'arrivées : $(1 - \pi_K)\lambda$.

Temps moyen d'attente :

$$E[T] = \frac{E[N]}{(1 - \pi_K)\lambda} = \frac{L}{(1 - \pi_K)\lambda}$$

Exemple : Dimensionnement d'un site Web

Quelle place mémoire faut-il allouer dans un serveur Web lorsque le nombre de requêtes/seconde = λ et que nous ne voulons pas avec des pertes supérieures à 1% ?

- Taux moyen d'arrivées : $\lambda = 30$ requêtes/seconde
- Taux de traitement des requêtes : $\mu = 50$ requêtes/seconde

Nous avons

$$\pi_K = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K$$

avec

$$\pi_0 = \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}$$

donc

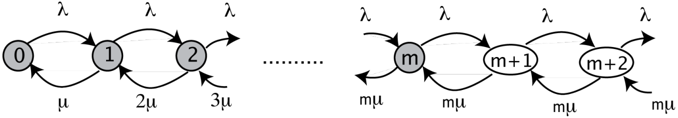
$$\pi_K = \frac{1 - 0.6}{1 - (0.6)^{K+1}} (0.6)^K < 0.01$$

Exercices 4 et 5

Applications aux dimensionnement de réseaux téléphoniques et cellulaires

File M/M/m (Erlang C)

Système de file d'attente ayant un nombre illimité de places, avec m serveurs.



Probabilité d'état du $k^{\text{ième}}$ état :

$$\pi_k = \pi_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k}$$

En remplaçant $(k \leq m)$:

$$\pi_k \quad = \quad \pi_0 \frac{\lambda \ldots \lambda}{\mu(2\mu)(3\mu)\ldots(k\mu)} = \frac{\pi_0}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

File M/M/m (Erlang C) (2)

Et pour $k > m$

$$\begin{aligned} \pi_k &= \pi_m \prod_{i=m}^{k-1} \frac{\lambda}{m\mu} \\ &= \pi_m \frac{\lambda^{k-m}}{(m\mu)^{k-m}} \\ &= \frac{\pi_0}{m!} \frac{\lambda^m}{\mu^m} \frac{\lambda^{k-m}}{(m\mu)^{k-m}} \\ &= \frac{\pi_0}{m! m^{k-m}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \end{aligned}$$

MSE MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING

File M/M/m (Erlang C) (3)

Il reste à calculer π_0 :

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}}$$

et après quelques calculs (cours page 142) :

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^m}{m!(1 - \lambda/(m\mu))} \right)^{-1}$$

Question intéressante : Quelle est la probabilité d'attendre avant d'être servi ?

$$\sum_{k=m}^{\infty} \pi_k = \frac{\pi_0}{m!} \left(\frac{\lambda/\mu}{1 - \lambda/(m\mu)} \right)$$

qui est la **Formule d'Erlang C**. (En téléphonie : probabilité d'être mis en attente alors que toutes les lignes sont occupées).

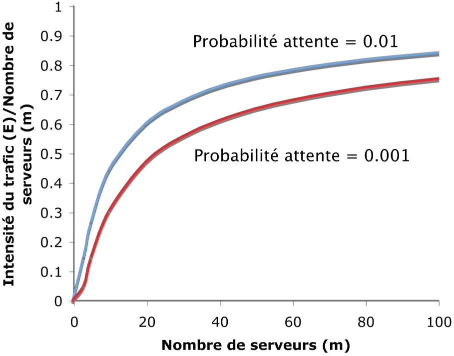
Réseaux GSM et UMTS :

- Arrivées Poissoniennes (hypothèse valide dans le cas de la téléphonie)
- Temps de service distribués exponentiellement.
- Intensité du trafic : $\rho = \lambda/\mu$. 1 **Erlang** = occupation d'une ligne en permanence.

Question :

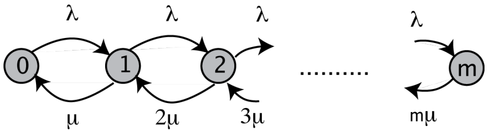
Comment dimensionner le système de telle sorte à ce que la probabilité d'être mis en attente ne dépasse pas un certain seuil (par exemple 0.01) pour un trafic estimé ?

Effet du nombre de serveurs (lignes) sur l'intensité du trafic avec une probabilité d'attente donnée



File M/M/m/m (Erlang B)

Système de file d'attente avec m serveur, sans tampon ! Si tous les serveurs sont occupés, les clients sont rejetés !



Probabilité d'état du $k^{\text{ième}}$ état :

$$\pi_k = \pi_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_k}$$

En remplaçant $(k \leq m)$:

$$\pi_k = \pi_0 \frac{\lambda ... \lambda}{\mu(2\mu)(3\mu)...(k\mu)} = \frac{\pi_0}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

File M/M/m/m (Erlang B)

Calcul de π_0 avec $\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_m = 1$

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{1}{k!} \right)^{-1}$$

La formule exprimant π_m est appelée “formule d'**Erlang B**”.

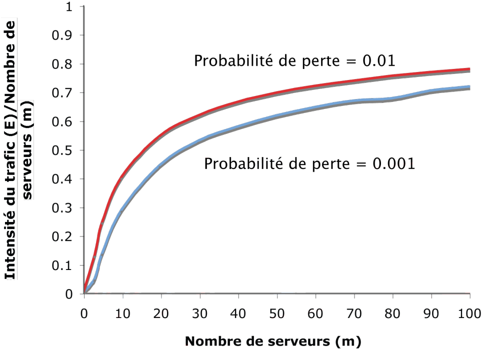
$$\pi_m = \frac{\pi_0}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m$$

Cette formule exprime la probabilité de voir tous les serveurs occupés alors qu'un nouveau client arrive dans le système. Un client perdu n'insiste pas et abandonne.

Calculs : http ://www.erlang.com/calculator

File M/M/m/m (Erlang B) (2)

Effet du nombre de serveurs (lignes) sur l'intensité du trafic avec une probabilité de perte donnée



Exemple de dimensionnement de réseaux cellulaires

Dans le contexte de la téléphonie cellulaire :

Probabilité de blocage = **Grade of Service (GOS)**. Donnée par la formule d'Erlang B.

Exemple dans une ville de 150'000 habitants (Lausanne)

- Opérateur A : 185 cellules avec 11 canaux chacune
- Opérateur B : 48 cellules avec 27 canaux chacune
- Opérateur C : 24 cellules avec 50 canaux chacune
- GOS=2%
- Chaque utilisateur fait en moyenne 2 appels/heure, de 3 minutes chacun.

Question : Quelle est la pénétration de marché de chacun ?

Trafic par utilisateur : 2 appels/heure * (3/60) heures = 0.1 Erlang

Exemple de dimensionnement de réseaux cellulaires

- L'opérateur A peut écouler 5.8 E sur 11 canaux et un GOS de 0.02, donc 5.8/0.1=58 utilisateurs/cellule. Puisqu'il en a 185, il peut servir 185*58=10'730 utilisateurs.
- L'opérateur B peut écouler 19.25 E sur 27 canaux, au total 192 utilisateurs/cellule. Donc il peut servir 9240 utilisateurs.
- Quant à l'opérateur C il peut écouler 40.25 E sur 50 canaux, donc 402 utilisateurs/cellule. En tout il peut servir 9660 utilisateurs. En tout 29'630 utilisateurs peuvent être servis.

La pénétration des systèmes mobiles est de 19% :

- 7.1% pour l'opérateur A
- 6.1% pour l'opérateur B
- 6.4% pour l'opérateur C

Confirmer les résultats obtenus avec http ://www.erlang.com/calculator

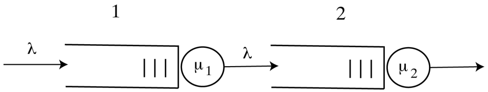
Réseaux de files d'attente

Réseaux de files d'attente

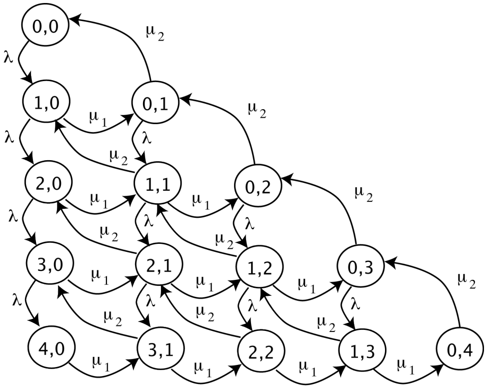
Cas général : Très compliqué.

Hypothèses :

- Les flux entrant dans le réseau sont Poissoniens
- Les temps de service de tous les serveurs sont exponentiellement distribués
- Discipline de service : FIFO
- Routage entre les différentes files : Probabiliste



Chaîne de Markov pour deux files d'attente en série avec les états (n_1, n_2), $n_1 \leq 4$, $n_2 \leq 4$



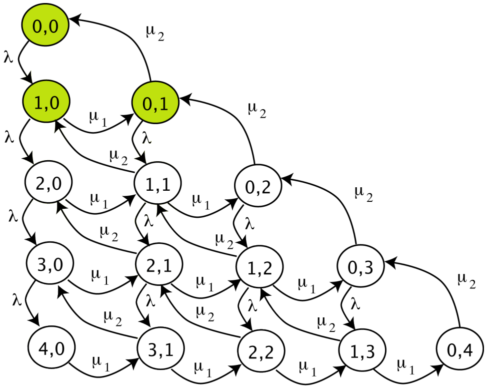
Réseaux de files d'attente (3)

Equations de balance :

$$
\begin{array}{ll}
\lambda \pi_{0,0} = \mu_2 \pi_{0,1} & n_1 = n_2 = 0 \\
\mu_2 \pi_{0,n_2} + \lambda \pi_{0,n_2} = \mu_1 \pi_{1,n_2-1} + \mu_2 \pi_{0,n_2+1} & n_1 = 0, n_2 > 0 \\
\mu_1 \pi_{n_1,0} + \lambda \pi_{n_1,0} = \lambda \pi_{n_1-1,0} + \mu_2 \pi_{n_1,1} & n_1 > 0, n_2 = 0 \\
\lambda \pi_{n_1,n_2} + \mu_1 \pi_{n_1,n_2} + \mu_2 \pi_{n_1,n_2} = & \\
\lambda \pi_{n_1-1,n_2} + \mu_1 \pi_{n_1+1,n_2-1} + \mu_2 \pi_{n_1,n_2+1} & n_1, n_2 > 0
\end{array}
$$

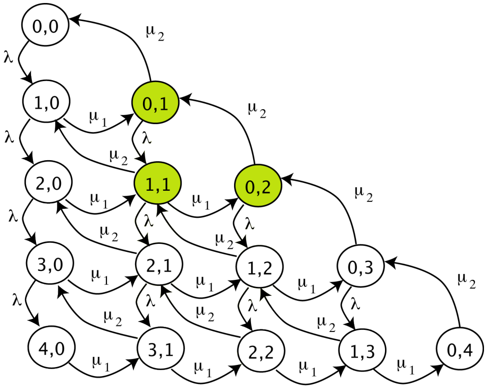
Réseaux de files d'attente (4)

Chaîne de Markov pour deux files d'attente en série avec les états (n_1, n_2), $n_1 \leq 4$, $n_2 \leq 4$



Réseaux de files d'attente (5)

Chaîne de Markov pour deux files d'attente en série avec les états (n_1, n_2), $n_1 \leq 4$, $n_2 \leq 4$.



Réseaux de files d'attente (6)

Nous n'avons qu'une équation pour les décrire

$$\mu_2\pi_{0,n_2} + \lambda\pi_{0,n_2} = \mu_1\pi_{1,n_2-1} + \mu_2\pi_{0,n_2+1}$$

mais on peut la décomposer en deux équations de balance locales :

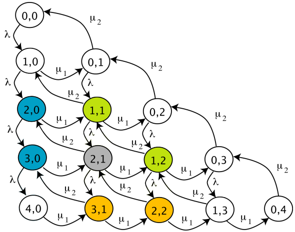
$$\begin{aligned} \mu_2\pi_{0,n_2} &= \mu_1\pi_{1,n_2-1} \\ \lambda\pi_{0,n_2} &= \mu_2\pi_{0,n_2+1} \end{aligned}$$

Nous pouvons procéder de manière identique pour l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mu_1\pi_{n_1,0} &= \lambda\pi_{n_1-1,0} \\ \lambda\pi_{n_1,0} &= \mu_2\pi_{n_1,1} \end{aligned}$$

Réseaux de files d'attente (7)

Chaîne de Markov pour deux files d'attente en série avec les états (n_1, n_2)



Il nous reste à écrire les équations de balance locales pour les états π_{n_1,n_2}. En observant les cycles sur la figure il vient

$$\lambda\pi_{n_1,n_2} = \mu_2\pi_{n_1,n_2+1}$$

$$\mu_1\pi_{n_1,n_2} = \lambda\pi_{n_1-1,n_2}$$

$$\mu_2\pi_{n_1,n_2} = \mu_1\pi_{n_1+1,n_2-1}$$

Résolution

Solution :

$$\pi_{n_1,n_2} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{n_1}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^{n_2}$$

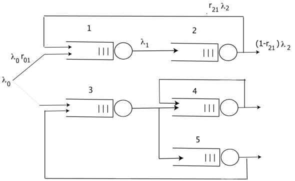
que nous pouvons écrire

$$\pi_{n_1,n_2} = (1-\rho_1)(\rho_1)^{n_1}(1-\rho_2)(\rho_2)^{n_2}$$

avec $\rho_1 = \lambda/\mu_1$ et $\rho_2 = \lambda/\mu_2$.

Hypothèses :

- Arrivées poissonniennes
- r_{ij} : probabilité de routage, qu'un client servi par la file i aille vers la file j.
- $0 \leq r_{ij} \leq 1$ pour $1 \leq i \leq J$ avec $\sum_{j=1}^{J} r_{ij} = 1$

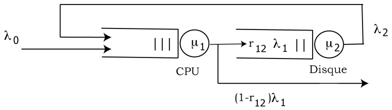


Alors

$$\pi_{n_1,n_2,\cdots,n_J} = \prod_{i=1}^{J} \rho_i^{n_i}(1-\rho_i)$$

Réseau de files d'atttente avec feedback

Les taux d'arrivées dans chacune des files d'attentes sont de $\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_2$ et $\lambda_2 = r_{12}\lambda_1$.



Nous trouvons facilement que $\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{1-r_{12}}$ et $\lambda_2 = \lambda_0 \frac{r_{12}}{1-r_{12}}$

Chaque file d'attente se comporte comme une file d'attente M/M/1 donc nous pouvons facilement la probabilité d'état du système

$$\pi_{n_1,n_2} = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{n_2}$$

avec $\rho_1 = \lambda_1/\mu_1$ et $\rho_2 = \lambda_2/\mu_2$.

Exercice 9