Chaînes de Markov continues

Dr Stephan Robert

18 mai 2016

Probabilités de transition

Introduction

- $\{X_n\}$: suite de variables aléatoires prenant des valeurs dans $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \ldots, m\}$, $\mathcal{E}$ dénombrable.
- La probabilité de transition d'un état (i) à l'instant t à un autre état (j) à l'instant $t + \tau$ ne dépend que de la différence de temps τ :

$$P(X_{t+\tau} = j | X_t = i) = p_{ij}(\tau)$$

- Processus homogène :

$$P(X_{t+\tau} = j | X(t) = i) = P(X_\tau = j | X_0 = i) = p_{ij}(\tau)$$

- Matrice de transition :

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \dots & p_{0m}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \dots & p_{1m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m0}(t) & p_{n1}(t) & \dots & p_{mm}(t) \end{pmatrix}$$

- Remarque :

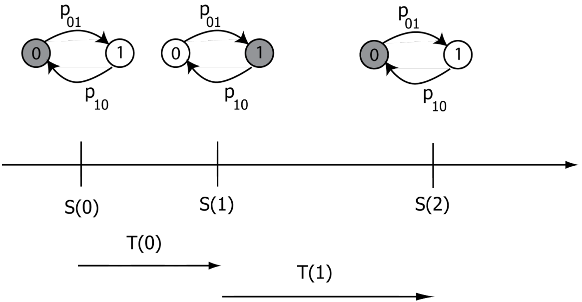
$$\mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} p_{00}(0) = 1 & p_{01}(0) = 0 & \dots & p_{0m}(0) = 0 \\ p_{10}(0) = 0 & p_{11}(0) = 1 & \dots & p_{1m}(0) = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m0}(0) = 0 & p_{m1}(0) = 0 & \dots & p_{mm}(0) = 1 \end{pmatrix}$$

Vecteur d'état

- Vecteur des probabilités d'état :

$$\vec{\pi}(t) = \begin{pmatrix} \pi_0(t) & \pi_1(t) & \dots & \pi_n(t) \end{pmatrix}$$

- *Jump* et *Holding* times (processus de comptage et durées d'attente)



Chapman-Kolmogorov

- Chaîne de Markov **régulière** :

$$\sum_{i=0}^{\infty} T(i) = \lim_{n\to\infty} S(n) = \infty$$

- Equations de **Chapman-Kolmogorov**

$$\mathrm{P}(t+\tau) = \mathrm{P}(t)\mathrm{P}(\tau)$$

Générateur

Générateur

Soient les probabilités de transition :

$$
\begin{array}{ll}
P(X_{t+\epsilon}=j|X_t=i)=p_{ij}(\epsilon)=1+q_{ij}\epsilon+o(\epsilon) & i=j \\
P(X_{t+\epsilon}=j|X_t=i)=p_{ij}(\epsilon)=q_{ij}\epsilon+o(\epsilon) & i\neq j
\end{array}
$$

En négligeant pour l'instant $o(\epsilon)$, on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(\epsilon) &= \begin{pmatrix} p_{00}(\epsilon) & p_{01}(\epsilon) & ... & p_{0m}(\epsilon) \\ p_{10}(\epsilon) & p_{11}(\epsilon) & ... & p_{1m}(\epsilon) \\ ... & ... & ... & \dots \\ p_{m0}(\epsilon) & p_{n1}(\epsilon) & ... & p_{mm}(\epsilon) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+\epsilon q_{00} & \epsilon q_{01} & ... & \epsilon q_{0m} \\ \epsilon q_{10} & 1+\epsilon q_{11} & ... & \epsilon q_{1m} \\ ... & ... & ... & \dots \\ \epsilon q_{m0} & \epsilon q_{n1} & ... & 1+\epsilon q_{mm} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Générateur (2)

Probabilités de transition :

- $p_{00}(\epsilon) = 1 + \epsilon q_{00}$
- $p_{01}(\epsilon) = \epsilon q_{01}$

Intensités ("rates") :

- $q_{00} = \lim_{\epsilon \to 0}(p_{00}(\epsilon) - 1)/\epsilon$
- $q_{01} = \lim_{\epsilon \to 0} p_{01}(\epsilon)/\epsilon$

Générateur :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0m} \\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ldots \\ q_{m0} & q_{n1} & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix}$$

Générateur (3)

Processus Markovien : Temps de séjour distribués exponentiellement :

$$P(T_i > \epsilon) = e^{-\nu_i \epsilon}$$

Approximation :

$$\begin{aligned} P(T_i > \epsilon) &\approx 1 - \frac{\nu_i \epsilon}{1!} + \frac{\nu_i^2 \epsilon^2}{2!} - \dots \\ &\approx 1 - \nu_i \epsilon + o(\epsilon) \end{aligned}$$

On a :

$$p_{ii}(\epsilon) \approx 1 - \nu_i \epsilon$$

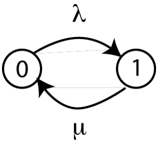
Générateur (4)

Définition : $q_{ii} = -\nu_i$

- La représentation de la chaîne de Markov ayant un générateur $\mathbf{Q}$ se fait de la façon suivante :
  - $\rightarrow$ Une flèche part de l'état i pour aboutir à l'état j et est marquée par q_{ij} et montre l'intensité (rate) de transition entre ces deux états.
- Quand **l'intensité** (rate) est nulle alors aucune flèche n'est dessinée
- **Temps de séjour moyen** dans l'état i : $-1/q_{ii}$
- Quand la chaîne de Markov **change d'état**, la probabilité de se retrouver ensuite dans l'état j est $-q_{ij}/q_{ii}$.

Exemple

Chaîne de Markov continue à deux états :



Modèle : File d'attente

- 0 : aucun client
- 1 : un client est en train de se faire servir
- Temps moyen de service : 2 minutes
- Temps moyen d'inoccupation du système : 3 minutes.

Exemple (2)

Donc nous avons :

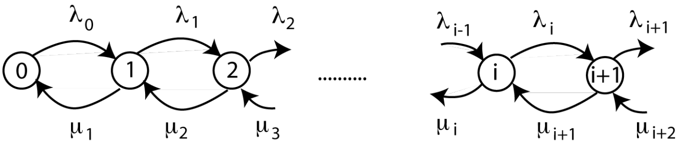
- $-1/q_{11} = 2 = 1/\mu$
- $-1/q_{00} = 3 = 1/\lambda$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/3 \text{ min}^{-1} & 1/3 \text{ min}^{-1} \\ 1/2 \text{ min}^{-1} & -1/2 \text{ min}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- <u>Observation</u> : La **somme** des éléments d'une ligne du générateur est **nulle**.

Exemple 2

Processus de naissance et de mort :



$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_i & -(\lambda_i+\mu_i) & \lambda_i & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Probabilités d'état

Probabilité d'état

Définition : $\pi_i(t) = P(X_t = i)$

$$\begin{aligned}
\pi_i(t+\epsilon) &= P(X_{t+\epsilon} = i) \\
&= \sum_{k=0}^{m} P(X_{t+\epsilon} = i | X_t = k) P(X_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{m} p_{ki}(\epsilon)\pi_k(t)
\end{aligned}$$

et si soustrayons $\pi_i(t)$ de chaque côté, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\pi_i(t+\epsilon) - \pi_i(t) &= \sum_{k=0}^{m} p_{ki}(\epsilon)\pi_k(t) - \pi_i(t) \\
&= \sum_{k=0, k\neq i}^{m} p_{ki}(\epsilon)\pi_k(t) + p_{ii}(\epsilon)\pi_i(t) - \pi_i(t)
\end{aligned}$$

Probabilité d'état (2)

et si nous divisons le tout par ϵ,

$$\frac{\pi_i(t+\epsilon)-\pi_i(t)}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}\sum_{k=0,k\neq i}^{m} p_{ki}(\epsilon)\pi_k(t) + (p_{ii}(\epsilon)-1)\pi_i(t)$$

Probabilité d'état (3)

Equations de Chapman-Kolmogorov

Mais

- $\lim_{\epsilon \to 0} p_{ki}(\epsilon)/\epsilon = q_{ki}$, $k \neq i$ et $\lim_{\epsilon \to 0}(p_{ii}(\epsilon) - 1)/\epsilon = q_{ii}$

$$\begin{aligned}\frac{d\pi_i(t)}{dt} &= \sum_{k=0,k\neq i}^{m} q_{ki}\pi_k(t) + q_{ii}\pi_i(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m} q_{ki}\pi_k(t)\end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\frac{d\vec{\pi}(t)}{dt} = \vec{\pi}(t)\mathbf{Q}$$

Comportement asymptotique

Observation : $\pi_i(t) \to \pi_i$, $i \in \mathcal{E}$ quand $t \to \infty$
Implication :

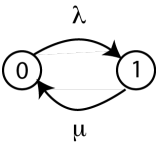
$$\frac{d\vec{\pi}(t)}{dt} = \vec{0}$$

A l'équilibre :

$$\vec{\pi}\mathbf{Q} = \vec{0}$$

Ces équations sont appelées les **équations de balance**.

Chaîne de Markov à deux états



Le générateur est donné par

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Equations de Chapman-Kolmogorov

$$\begin{pmatrix} \frac{d\pi_0(t)}{dt} & \frac{d\pi_1(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0(t) & \pi_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Exemple (2)

Développement :

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_0(t)}{dt} + (\lambda+\mu)\pi_0(t) &= \mu \\ \frac{d\pi_1(t)}{dt} + (\lambda+\mu)\pi_1(t) &= \lambda \end{aligned}$$

Solutions générales (ED premier ordre) :

$$\begin{aligned} \pi_0(t) &= C_0 e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ \pi_1(t) &= C_1 e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

Exemple (3)

Au temps $t = 0$

$$\begin{aligned} \pi_0(0) &= C_0 + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ \pi_1(0) &= C_1 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

En remplaçant nous obtenons :

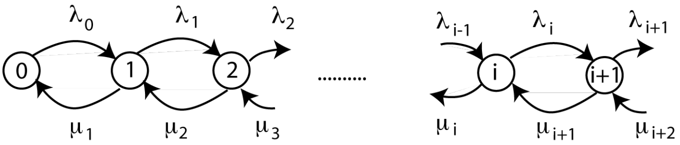
$$\begin{aligned} \pi_0(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(\pi_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \pi_1(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \left(\pi_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) e^{-(\lambda+\mu)t} \end{aligned}$$

Quand $t \to \infty$

$$\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \qquad \pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Exemple 2

Processus de naissance et de mort



$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_i & -(\lambda_i+\mu_i) & \lambda_i & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Exemple 2 (2)

Equations de balance globales ($\vec{\pi}\mathbf{Q} = \vec{0}$) :

$$\begin{array}{rcl} -\pi_0\lambda_0 + \pi_1\mu_1 & = & 0 \\ \pi_0\lambda_0 - \pi_1(\lambda_1 + \mu_1) + \pi_2\mu_2 & = & 0 \\ \pi_1\lambda_1 - \pi_2(\lambda_2 + \mu_2) + \pi_3\mu_3 & = & 0 \\ \dots & = & \dots \end{array}$$

Première équation :

$$\pi_1 = \pi_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1}$$

En remplaçant dans la deuxième équation :

$$\pi_2 = \pi_0 \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}$$

Exemple 2 (3)

Généralement :

$$\pi_i = \pi_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_i}$$

Mais la somme de toutes les probabilités d'état est égale à 1 :

$$\pi_0 (1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_i}) = 1$$

Alors

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_i}}$$

si

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 ... \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 ... \mu_i} < \infty$$

Classification des états

Classification des états, récurrence

Définitions :

- Un état j est dit **accessible** depuis l'état i si $p_{ij}(n) > 0$, $n \geq 0$.
- Si tous les états d'une chaîne de Markov sont accessibles, on dit qu'ils appartiennent à une même classe et la chaîne est dite **irréductible**.
- Un état est dit **récurrent** si la probabilité d'y retourner est égale à 1. Dans le cas contraire l'état est dit **transitoire**.

Observations :

- Un état **récurrent** est visité un **nombre infini** de fois. Un état **transitoire** n'est visité qu'un **nombre fini** de fois.
- Une chaîne de Markov irréductible et apériodique est **ergodique**.