MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING

Modélisation Stochastique

Compléments de solutions

8 décembre 2009

Série 3

Problème 2

Pour trouver l'autocovariance, entre la troisième et la quatrième ligne :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_M(\mathrm{n,k}) &= \frac{1}{n}\frac{1}{k}E[(S_n - E[S_n])(S_k - E[S_k])] \\ &= \frac{1}{nk}\min(n,k)\sigma_X^2\end{aligned}$$

Voici un petit développement complémentaire :

Reprenons

$$\begin{aligned}E[(S_n - E[S_n])(S_k - E[S_k])] &= E[\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X])\sum_{j=1}^{k}(X_j - E[X])] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}E[(X_i - E[X])(X_j - E[X])]\end{aligned}$$

Les VA X_i sont indépendantes, ce qui signifie que $E[(X_i - E[X])(X_j - E[X])]$ est non nul seulement quand $i = j$, donc

$$
\begin{aligned}
E[(S_n - E[S_n])(S_k - E[S_k])] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} E[(X_i - E[X])(X_j - E[X])] \\
&= \sum_{i=1}^{\min(n,k)} E[(X_i - E[X])(X_j - E[X])] \\
&= \min(n,k)\sigma^2
\end{aligned}
$$

Série 8

Problème 6

Solution

1. Nous avons $\lambda = 10$, $1/\mu = 1/2$, et donc $\rho = \lambda/\mu = 5$.
2. La probabilité de perte est donnée par

$$
\pi_m = B(m,\rho) = \frac{\frac{\rho^m}{m!}}{\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!}}
$$

Nous connaissons $\rho = 5$. Il suffit donc de calculer $B(m,5)$ pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ avec un petit programme ou à la main. Nous pouvons aussi calculer la probabilité de perte (ou de blocage) itérativement :

$$
B(m,\rho) = \frac{\frac{\rho^m}{m!}}{\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{k!}}
$$

$$
= \frac{\frac{\rho.\rho^{m-1}}{m.(m-1)!}}{\frac{\rho^m}{m!} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!}}
$$

$$
= \frac{\frac{\rho.\rho^{m-1}}{m.(m-1)!} / \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!}}{\frac{\rho^m}{m!} / \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!} / \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!}}
$$

$$
= \frac{\frac{\rho}{m} B(m-1,\rho)}{1 + \frac{\rho}{m} B(m-1,\rho)}
$$

$$
= \frac{\rho B(m-1,\rho)}{m + \rho B(m-1,\rho)}
$$

$$\begin{aligned}
B(0,5) &= 1 \\
B(1,5) &= \frac{5.1}{1+5.1} = \frac{5}{6} \\
B(2,5) &= \frac{5(5/6)}{2+5(5/6)} = \frac{25}{37} \\
B(3,5) &= \frac{5(25/37)}{3+5(25/37)} = \frac{125}{236} \\
B(4,5) &= \frac{5(125/236)}{4+5(125/236)} = \frac{625}{1569} \\
\rightarrow B(5,5) &= \frac{5(625/1569)}{5+5(625/1569)} = \frac{625}{2194} \approx 28.5\% \\
&\vdots \\
B(8,5) &= 0.070
\end{aligned}$$

On a donc besoin de 3 serveurs de plus.

Problème 7

Combien d'utilisateurs ($\lambda/\mu = 0.1$ pour un utilisateur) peuvent être supportés pour une probabilité de blocage de 0.5% pour les systèmes suivants :

- $m = 5$ ou $C = 5$
- $m = 10$
- $m = 20$
- $m = 100$

Solution

Il suffit de calculer le trafic qu'on peut écouler avec le calculateur que l'on trouve en

http ://www.erlang.com/calculator/erlb

- $m = 5$: On peut écouler 1.1 E. Donc 11 utilisateurs.
- $m = 10$: On peut écouler 3.95 E. Donc 39 utilisateurs.
- $m = 20$: On peut écouler 11.05 E. Donc 110 utilisateurs.
- $m = 100$: On peut écouler 80.9 E. Donc 809 utilisateurs.