Télétrafic (TTR)

TRAVAIL ECRIT

18 juin 2015

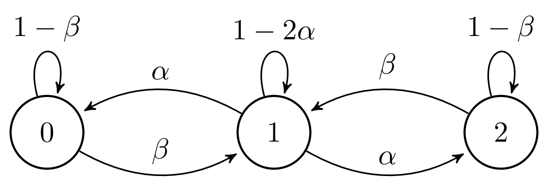
NOM :...

PRENOM :...

Max : 46 points

Problème 1 (6 points)

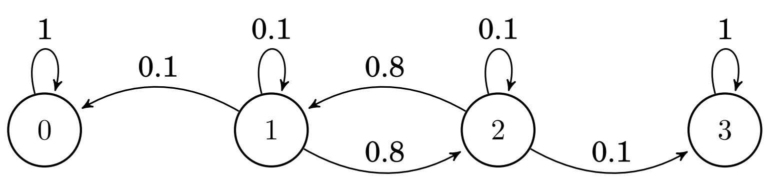
Soit la chaîne de Markov discrète représentée par le diagramme suivant :



1. Donnez sa matrice de transition (1 point).
2. Quel sont les domaines de définition des valeurs α et β ? (1 point)
3. Calculez les probabilités d'état stationnaires en fonction de α et β (2 points)
4. Est-ce que cette chaîne de Markov est irréductible ? Justifiez. (1 point)

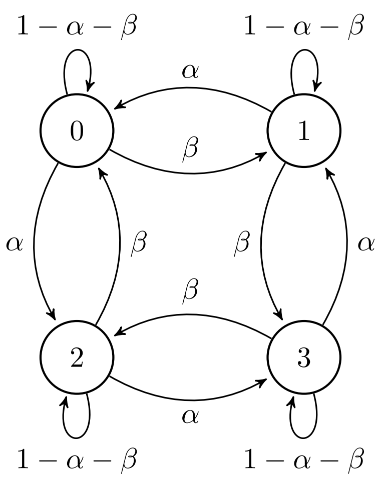
Problème 2 (5 points)

Soit la chaîne de Markov discrète représentée par le diagramme suivant :



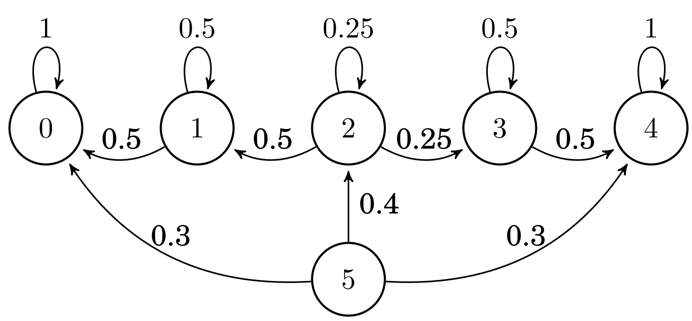
1. Donnez sa matrice de transition. (1 point)
2. Est-ce que cette chaîne de Markov est irréductible ? Justifiez. (1 point)
3. Si nous partons de l'état 1, quelle est la probabilité de se trouver dans l'état 2 après 1 pas ? Après 2 pas ? (2 points)
4. Quelle est la probabilité que l'état 2 soit visité avant l'état 0 si nous partons de l'état 1 ? (1 point)

Problème 3 (2 points)



1. Calculez les probabilités d'état stationnaires. (1 point)
2. Est-ce que le processus est réversible ? Pourquoi ou pourquoi pas ? (1 point)

Problème 4 (5 points)



Au départ vous vous trouvez dans l'état 5 . Trouvez la probabilité que

1. le processus n'entre jamais dans l'état "1". (1 point)
2. le processus entre la première fois dans l'état "0" au troisième pas d'itération. (3 points)
3. le processus soit dans l'état '2" après n itérations. (1 point)

Problème 5 (6 points)

Fortune d'un joueur A contre un joueur B. Considérons une partie entre deux joueurs A et B dont la somme de leurs fortunes est égale à a francs. A chaque partie le joueur gagne 1 franc de son adversaire avec une probabilité p et donne un franc à B avec une probabilité $q = 1 - p$. Le jeu s'arrête dès lors que l'un des joueurs est ruiné. On note X_n la fortune du joueur A à l'instant n (celle du joueur B est bien sûr $a - n$). On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Donnez la matrice de transition. (1 point)
2. Dessinez la chaîne de Markov discrète. (1 point)
3. Que pouvez-vous dire des états a et 0. (1 point)
4. Trouver les probabilités d'état stationnaires. (1 point)
5. Est-ce que cette chaîne est réversible ? Le prouver. (2 points)

Problème 6 (5 points)

Donnez les propriétés des chaînes de Markov discrètes suivantes, définies par leurs matrices de transition. Sont-elles

1. Irréductibles ?
2. Périodiques ?

$$\text{(a) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \text{(b) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{(c) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \text{(e) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Problème 7 (6 points)

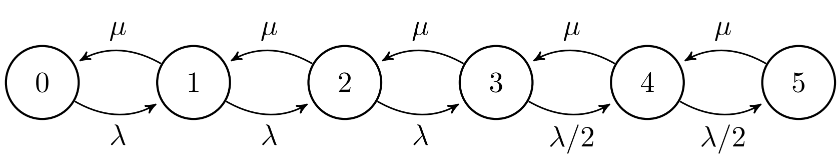
Intéressons-nous à une autre chaîne de Markov discrète, à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, a-1, a\}$ ayant la matrice de transition suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \ldots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & q & 0 & p & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & q & 0 & p \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

1. Dessinez la chaîne de Markov. (1 point)
2. Trouvez les probabilités d'état stationnaires pour $p \neq q$ et pour $p = q$. (4 points)
3. Est-ce que la chaîne de Markov est irréversible ? (1 point)

Problème 8 (11 points)

Intéressons-nous à une chaîne de Makov continue finie, qui représente une file d'attente où deux types de clients arrivent selon un processus de Poisson avec un débit (ou intensité) de $\lambda/2$. Le premier type de clients est toujours accepté dans le système alors que le type 2 est rejeté lorsque le système a plus de 3 clients.



1. Calculez les probabilités d'états stationnaires du système. (4 points)
2. Quelle est la probabilité que le système soit saturé ? (1 point)
3. Calculez les probabilités stationnaires du système si la chaîne de Markov (file d'attente) est infinie. (3 points)
4. Calculez l'espérance mathématique du nombre de clients dans le système lors que le système a une file d'attente finie. (2 points)
5. Calculez l'espérance mathématique du nombre de clients dans le système lors que le système a une file d'attente infinie. (1 point)