Modélisation Stochastique

HAUTE ECOLE SPÉCIALISÉE DE LA SUISSE OCCIDENTALE
Avenue de Provence 6, 1000 Lausanne, Suisse

27 octobre 2009

Stephan Robert, HEIG-Vd

SERIE 6

Chaînes de Markov continues

Problème 1

Une usine a n machines et un technicien pour les réparer. Une machine est en état de marche pendant un temps exponentiellement distribué avec le paramètre μ. Le technicien travaille sur une machine à la fois et ça lui prend un temps exponentiellement distribué (de paramètre α) pour réparer chaque machine. Soit $X(t)$ le nombre de machines en état de marche au temps t.

1. Montrez que si $X(t) = k$, alors le temps jusqu'à ce que la prochaine machine tombe en panne est une variable exponentiellement distribuée avec le paramètre $k\mu$.
2. Trouvez le générateur et dessinez le diagramme de transition pour $X(t)$.
3. Ecrivez les équations de balance globales et trouvez les probabilités d'état stationnaires pour $X(t)$.

Problème 2

Problème 2

Dessinez le diagramme de transition et trouvez les probabilités de d'état de la chaîne de Markov continue ayant le générateur suivant :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

Problème 3

Soit $X(t)$ un modèle continu pour l'activité de la voix, dans lequel une personne est active (état 1) durant un temps exponentiellement distribué avec le paramètre α et silencieux (état 0) durant un temps exponentiellement distribué avec le paramètre β. Faites l'hypothèse que les durées d'activité et de silence sont des variables aléatoires indépendantes.

1. Trouvez la chaîne de Markov à deux états pour $X(t)$.
2. Trouvez $\pi_0(t)$ et $\pi_1(t)$.
3. (*) Trouvez la fonction d'autocorrélation de $X(t)$.
4. Si $X(t)$ est asymptotiquement WSS, trouvez sa densité spectrale.
5. Suposez que vous ayez n personnes qui parlent indépendamment et soit $N(t)$ le nombre de personnes actives au temps t. Trouvez la fonction d'autocorrélation de $N(t)$ et sa densité spectrale si elle est asymptotiquement WSS.

Problème 4

Soit une marche aléatoire dans l'ensemble des états $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \ldots, M\}$ avec les probabilités de transition :

$$p_{01} = 1$$
$$p_{M,M-1} = 1$$
$$p_{i,i-1} = q,\ i = 1, \ldots, M-1$$
$$p_{i,i+1} = p,\ i = 1, \ldots, M-1$$

Trouvez la portion de temps passé dans chacun des états.