HAUTE ECOLE SPÉCIALISÉE DE LA SUISSE OCCIDENTALE
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud

Master of Science in Engineering (MSE)

Cours central (bases théoriques) : Modélisation stochastique
(Semestre d'hiver 2009, S. Robert)

SERIE 3

29 septembre 2009

Problème 1

Soit $X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où A et B sont des variables aléatoires gaussiennes avec une espérance mathématique nulle et une variance égale à σ^2. Trouvez l'espérance mathématique et l'autocovariance de $X(t)$. Montrez que le processus est stationnaire au sens large mais pas au sens strict.

Problème 2

Soit

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

où les X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sont indépendents et identiquement distribués. Trouvez l'espérance mathématique et la variance de M_n. Trouvez également la covariance entre M_n et M_k.

Problème 3

Un processus stochastique X a une fonction d'autocorrélation

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 0 & |\, \tau \,| > 1 \\ A(1 - |\, \tau \,|) & |\, \tau \,| \leq 1 \end{cases}$$

Est-ce que le processus X est ergodique en moyenne ?

HAUTE ECOLE SPÉCIALISÉE DE LA SUISSE OCCIDENTALE

Cours central de Master MSE : Modélisation stochastique

SERIE 3

Problèmes supplémentaires facultatifs, avec réponses

Problème 4

Considérez le processus stochastique X tel que $X_n = \{X_n, n \geq 1\}$ où

$$X_n = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

Les variables aléatoires Z_i, $i \geq 1$ ont leur espérance mathématique nulle et leur variance égale à l'unité. Est-c e que le processus stochastique est stationnaire ?

Réponse :

Non

Problème 5

Un processus stochastique $H = (H_t, t \in \mathbb{R})$ est défini comme

$$H_t = \begin{cases} +1 & \text{quand } X_t \geq 0 \\ -1 & \text{quand } X_t < 0 \end{cases}$$

Trouver (a) l'espérance mathématique et (b) l'autocovariance de H_t si $X_t = \gamma \cos(2\pi t)$ avec γ étant une amplitude aléatoire.

Réponse :

(a) $E[H_t] = 0$.
(b) $C(t, t+\tau) = 1$ pour t quand τ est tel que $\cos(2\pi t)\cos(2\pi(t+\tau)) = 1$.
Sinon $C(t, t+\tau) = -1$ pour t si τ tel que $\cos(2\tau t)\cos(2\pi(t+\tau)) = -1$.

Problème 6

Soit $Z_t = At + B$ où A et B sont deux variables aléatoires indépendantes. Trouvez (a) l'espérance mathématique du processus stochastique et (b) sa fonction d'auto-covariance.

Réponse :

(a) $E[A]t + E[B]$
(b) $E[A^2]t_1t_2 + E[AB](t_1 + t_2) + E[B^2]$