Télétrafic (TTR)

Laboratoire 2

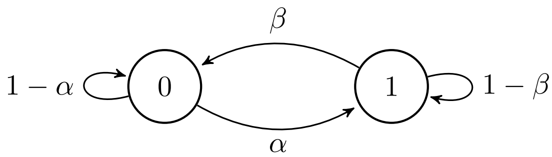
Simulation de chaînes de Markov discrètes

Novembre 2019

Stephan ROBERT - stephan.robert@heig-vd.ch

1 Simulation d'une chaîne de Markov à deux états, premier modèle d'ATM

Prenons l'exemple d'un premier modèle du trafic ATM (ce modèle s'est révélé ne pas refléter la réalité mais il a été utilisé au début pour le dimensionnement des mémoires des commutateurs ATM, dans les années 1990-2000). Un créneau est soit vide soit plein suivant qu'il contienne ou non un paquet. Si le n^{e}créneau est vide alors la probabilité que le créneau suivant soit plein est α et la probabilité que le créneau suivant soit vide est $1-\alpha$. N'oublions pas que c'est un modèle que nous établissons arbitrairement. La validation de ce modèle est un autre problème qui n'est pas abordé ici mais on admet que ce modèle est relativement bon. Ce modèle a aussi été utilisé pour la modélisation de la parole (où un "0" représente un silence et un "1" représente une activité vocale) . Revenons à notre explication. Similairement, si le n^{e}créneau est plein, la probabilité que le n+1^{e}créneau soit vide est β et la probabilité que le n+1^{e}créneau soit plein est $1-\beta$. On va alors représenter la chaîne de Markov (homogène) de la façon suivante :



La matrice de transition (appelée aussi *matrice stochastique*) est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0|X_n=0)=p_{00} & P(X_{n+1}=1|X_n=0)=p_{01} \\ P(X_{n+1}=0|X_n=1)=p_{10} & P(X_{n+1}=1|X_n=1)=p_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Et dans ce cas l'ensemble des états est $\mathcal{E}=\{0,1\}$. Remarquons que la somme des probabilités liées aux flèches partant d'un état est égale à 1 ou

$$P(X_{n+1}=0|X_n=0)+P(X_{n+1}=1|X_n=0)=1$$

et

$$P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) + P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 1$$

et les probabilités d'état :

$$\mathbf{p}(n) = \begin{pmatrix} p_1(n) & p_2(n) & \ldots & p_l(n) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1).\mathbf{P}$$

mais $\mathbf{p}(n-1) = \mathbf{p}(n-2)\mathbf{P}$ et donc finalement $\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0).\mathbf{P}^n$. Nous remarquons que les probabilités d'état à un certain instant sont complètement déterminées par l'état initial de la chaîne de Markov et sa matrice de transition.

Il est intéressant maintenant de voir ce qu'il se passe quand on laisse "tourner" une chaîne de Markov suffisamment longtemps. Et bien on remarque que l'état initial perd de son importance. Dans l'exemple de la chaîne de Markov à deux états, nous avons

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.\mathbf{P}^n \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.\mathbf{P}^n \tag{1}$$

quand n est grand. Donc $p_j(n)$ tend vers une valeur unique (pour autant qu'elle existe... mais admettons-le !) et constante lorsque $n \to \infty$, quelles que soient les conditions initiales. On va appeler cette valeur π_j et on va dire que le système a atteint l'équilibre ou qu'il est dans son état stable.

On peut ainsi définir une densité de probabilité à l'état stationnaire de la chaîne de Markov sur $\mathcal{E}$ à l'aide d'un vecteur ligne π. Chacun des éléments de π sera égale à la probabilité d'état stationnaire de la chaîne de Markov, soit

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_m \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{p}(n) \approx \mathbf{p}(n-1) \to \pi$ quand $n \to \infty$, alors on peut écrire

$$\pi = \pi\mathbf{P}$$

Cette relation comprend $n-1$ équations linéairement indépendantes. Pour trouver chaque π_i lorsque la matrice de transition est donnée, il faut encore tenir compte du fait que

$$\sum_i \pi_i = 1$$

sur l'ensemble des états $\mathcal{E}$. Avec ces deux relations, nous arrivons à déterminer les probabilités d'état lorsque la matrice de transition de la chaîne de Markov est connue. Il faut faire attention car il y a beaucoup de chaînes de Markov qui ne possèdent pas de distribution stationnaire ! On verra quelques exemples ultérieurement. Mais avant d'en parler reprenons l'exemple de notre chaîne de Markov à deux états et appliquons ce que nous avons vu jusqu'ici.

Plus conrètement si nous reprenons la chaîne de Markov à deux états avec la matrice de transition suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

et que nous fixons les paramètres α et β : $\alpha = 0.1$ et $\beta = 0.3$ et calculons $\mathbf{P}^n$:

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.72 \\ 0.24 & 0.76 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0.2512 & 0.7488 \\ 0.2496 & 0.7504 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{10} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que $\mathbf{P}^n$ converge bien quand n devient grand. Nous pouvons même dire que

$$\mathbf{P}^n \to \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

quand $n \to \infty$. Maintenant nous allons essayer de trouver les probabilités d'état stationnaires. Il suffit de poser l'équation

$$\pi = \pi \mathbf{P}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0(1-\alpha) + \pi_1\beta \\ \pi_1 &= \pi_0\alpha + \pi_1(1-\beta) \end{aligned}$$

Seulement ces deux équations sont linéairement dépendantes, donc il faut se souvenir que

$$\sum_i \pi_i = 1$$

sur l'ensemble des états $\mathcal{E}$. Donc ici, $\pi_0 + \pi_1 = 1$. En prenant une seule équation et en tenant compte que $\pi_0 + \pi_1 = 1$ (puisqu'elles sont linéairement dépendantes), nous trouvons immédiatement que

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \pi_1 &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

et si nous remplaçons par les valeurs de α et β, nous trouvons $\pi_0 = 1/4$ et $\pi_1 = 3/4$. C'est très intéressant car nous retrouvons les mêmes valeurs que précédemment.

Demandé :

1. Ecrivez un programme Python, (avec la librairie NumPy entre autres) pour simuler une chaîne de Markov à 2 états et donnez ("graphez") plusieurs trajectoires. Partez une fois de l'état "0" et une fois de l'état "1". Tracez trois graphes (trajectoires) en partant de l'état "0" et et trois graphes en partant de l'état "1"

2. Nous pouvons aussi utiliser ce modèle comme modèle météorologique très simple, dans lequel la probabilité d'être chaud ou froid dépend de la météo du jour précédent. Si la probabilité que demain soit chaud étant donné qu'il fait chaud est de 0,7, et que la probabilité que demain soit froid étant donné qu'il fait froid aujourd'hui est de 0,4. Quelle est la matrice de transition ? Tracez l'évolution de la probabilité qu'il fasse chaud le jour suivant si on part d'un jour chaud (1 à 20 jours). S'il fait chaud aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fasse chaud dans 10 jours ?

2 Simulation d'une chaîne de Markov à trois états

On a une chaîne de Markov avec la matrice de transition suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Demandé :

1. Dessinez la chaîne de Markov
2. Simulez la chaîne de Markov en prenant 3 conditions initiales différentes (en partant de l'état 1, 2 et 3). Plottez $\mathbf{p}$ en fonction du temps n pour chaque cas (3 graphiques). Commentez.
3. Essayer avec une chaîne de Markov ayant cette matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Quelle sont vos conclusions ?
4. Ecrivez une fonction qui accepte une matrice de transition $n \times n$, A, une tolérance de convergence ϵ et un nombre maximal d'itérations N. Générez un vecteur de probabilités d'états aléatoire $\mathbf{p}(0)$ et calculez $\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{p}(k)\mathbf{A}$ jusqu'à ce que $||\mathbf{p}(k-1) - \mathbf{p}(k)||k < \epsilon$. Si k dépasse N, il faut signaler une erreur (le vecteur de probabilités d'états ne converge pas). Printez alors le vecteur $\mathbf{p}$.
5. Générez une matrice de transition aléatoire $\mathbf{A}$ et un vecteur aléatoire également. Ensuite calculez $\mathbf{A}^n$ et trouvez une estimation de π (avec une certaine tolérance).

3 Simulation d'une marche aléatoire

Considérez la chaîne de Markov suivante : Vous allez au casino avec F francs (multiple de 10 francs). Vous jouez et pariez 10 francs à chaque fois, avec une probabilité p de gagner 10 francs. X_n est votre fortune après le n^{eme} jeu. $X_n \in \{0, 10, 20, \dots\}$ et l'état 0 est absorbant, $P(X_{n+k} = 0|X_k = 0) = 1$, pour tout $n > 0$. La chaîne n'est pas irréductible.

Demandé :

1. Dessinez la chaîne de Markov
2. Prenez $p = 0.5$ et $F = 100$ CHF. Après 1 jeu quelle est la probabilité d'avoir 110 CHF, celle d'avoir 100 CHF, et celle d'avoir 90 CHF ? Après 2 jeux, quelles sont les probabilités d'avoir 80 CHF, 90 CHF, 100 CHF, 110 CHF, 120 CHF ? Et ainsi de suite. Tracez la distribution en fonction du nombre de fois m que vous jouez. Prenez $m = 20$ par exemple.
3. Reprenez l'exemple de ci-dessus mais avec $p = 0.48$ qui est une situation beaucoup plus réaliste dans un Casino. Quelle est votre conclusion ?

4 Simulation d'un virus (optionel)

Un virus peut se présenter sous forme de N souches différentes. A chaque génération, soit le virus reste à la même souche avec une probabilité p, soit une mutation a lieu et il change dans une des autres $N - 1$ souches au hasard. Dessinez cette chaîne de Markov et sa matrice de transition $\mathbf{P}$. Pour le cas $N = 4$ et $p = 1/3$, calculer $\mathbf{P}$ et utiliser Matlab pour trouver $\mathbf{P}^5$ et la probabilité théorique que dans 5 générations le virus est le même qu'au début. Simuler ensuite l'évolution du virus sur 5 générations 100 fois et trouver la valeur calculée (observée) pour cette probabilité, et comparez-la avec la valeur théorique.

5 Simulation, oeufs Kinder (optionel)

Marie collectionne des jouets des œufs Kinder. Il y a au total 30 jouets à collectionner, tous également probables. On peut modéliser comme une chaîne Markov le nombre X_n de différents jouets accumulés après un achat de n œufs. Le nombre moyen d'œufs à acheter pour que tous les jouets soient trouvés correspond au temps moyen jusqu'à l'absorption par l'état $X_n = 30$, dont la valeur théorique est $\mu = 30 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{30}\right)$. Simuler cette situation 20 fois avec Matlab pour estimer le nombre moyen d'œufs que Marie doit acheter pour trouver tous les jouets et comparez-le avec la valeur théorique.

6 Complément : NLP

Il existe une librairie intéressante pour faire du NLP (Natural Language Processing) avec Python où on utilise des chaînes de Markov : **nltk**. Ce module de Python (kit de langage naturel) comporte de nombreux outils d'analyse et d'analyse de texte. Par exemple, *nltk.sent_tokenize ()* lit une chaîne unique et la scinde en phrases. Le module *nltk* ne fait pas partie de la bibliothèque standard Python. Pour obtenir des instructions sur le téléchargement, l'installation et l'utilisation de nltk, il faut aller sur le site http ://www.nltk.org/.