Télétrafic (TTR)

SERIE 1

Chaînes de Markov discrètes

Octobre 2019

stephan.robert@heig-vd.ch

Problème 1

Un opérateur de téléphonie mobile, T1, a le 60% du marché à la Chaux-de-Fonds. On remarque, d'après les données de l'an dernier, que 88% des clients sont restés chez T1, alors que 12% sont partis à la concurrence, T2. En plus nous avons observé que 85% des clients de T2 restent loyaux à la concurrence alors que 15% reviennent chez T1. Si on fait l'hypothèse que rien ne changera dans le futur, quelles seront les parts de marché de T1 et de T2 dans 5 ans ? dans 10 ans ? à long terme ?

Et si la part de marché de T1 est de 90% au départ, quelles sont les parts de marché après 5 ans ? 10 ans ? à terme ?

Problème 2

A la HEIG-Vd nous avons re-organisé un semestre sous forme de "boot camp", avec deux semaines de théorie, suivies de deux semaines de projets (matière à 6 ECTS). Il y a un examen entre les deux sessions. Nous avons remarqué que 60% des étudiants de la première phase passent les examens et sont acceptés pour la deuxième phase. 40% des étudiants arrêtent définitivement. Parmi ceux qui ont été acceptés pour la deuxième phase, 70% réussissent du premier coup et ont leur certificat, 20% arrêtent définitivement et 10% répètent la deuxième phase. Admettons qu'à un moment dans le semestre il y ait 45 étudiants en classe et 21 qui font des projets.

1. Dessinez la chaîne de Markov
2. Quelle est la matrice de transition ?
3. Quel est le vecteur des probabilités d'état initial ?
4. Combien d'étudiants vont-ils recevoir leurs 6 crédits à la prochaine échéance ?
5. Sur le long terme quelle est la proportion des étudiants qui va recevoir les crédits ECTS ?

Problème 3

Soit une chaîne de Markov définie par sa matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

où $0 \leq \alpha \leq 1$. L'ensemble des états est donné par $\{0, 1, 2\}$.

1. Pour quelles valeurs de α la chaîne de Markov est-elle irréductible et ergodique ?
2. Calculez les probabilités d'état en fonction de α.

Problème 4

Soit une chaîne de Markov définie par sa matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'ensemble des états est donné par $\{0, 1, 2, 3\}$. Si $X_0 = 1$, quelle est la probabilité que l'état 0 soit visité avant l'état 3 ?

Problème 5

1. Identifiez les états transitoires, récurrents et périodiques de la chaîne de Markov décrite par la matrice de transition suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

2. Combien de classes sont formées par les états récurrents de ce processus ?
3. Evaluez $\lim_{n\to\infty} p_{41}(n)$ et $\lim_{n\to\infty} p_{66}(n)$

Problème 6

Un point se déplace sur un cercle unité et saute de $\pm$ 90 degrés. Supposez que le processus est initialement à 0 degrés et que la probabilité de passer à + 90 degrés est de p (tourner de + 90 degrés dans le sens inverse des aiguilles de la montre) et la probabilité de passer à $-$ 90 degrés est q.

1. Trouvez les probabilités de transition pour la chaîne de Markov résultante et calculez les probabilités d'état.
2. Est-ce que le processus est réversible ? Pourquoi ou pourquoi pas ?

Problème 7

Considérez une marche aléatoire dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, M\}$ avec les probabilités de transition $p_{00} = q, p_{01} = p, p_{i,i+1} = p, p_{M,M} = p, p_{M,M-1} = q, p_{i,i-1} = q$ pour $i = 1, \ldots, M-1$. Trouvez la proportion du temps passé dans chaque état.

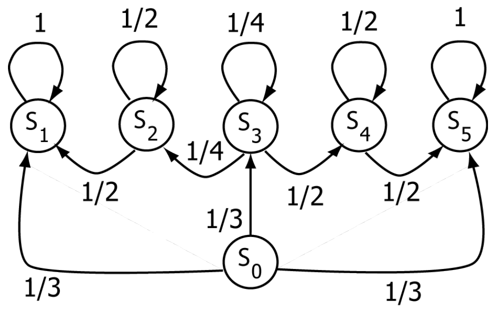
Problème 8

On a une machine de production qui consiste en deux parties distinctes qui tombent en panne et sont réparées indépendamment. Une des parties tombe en panne avec une probabilité a pendant un jour et est réparée avec une probabilité b le jour suivant. Soit X_n le nombre de parties qui fonctionnent (soit 0, 1 ou 2) durant un jour ouvrable n.

1. Montrez que X_n est une chaîne de Markov à trois états et donner sa matrice de transition $\mathbf{P}$.
2. Trouver les probabilités de l'état stationnaire.

Problème 9

Considérez cette chaîne de Markov :



Le processus est dans l'état S_0 au départ. Calculez la probabilité que :

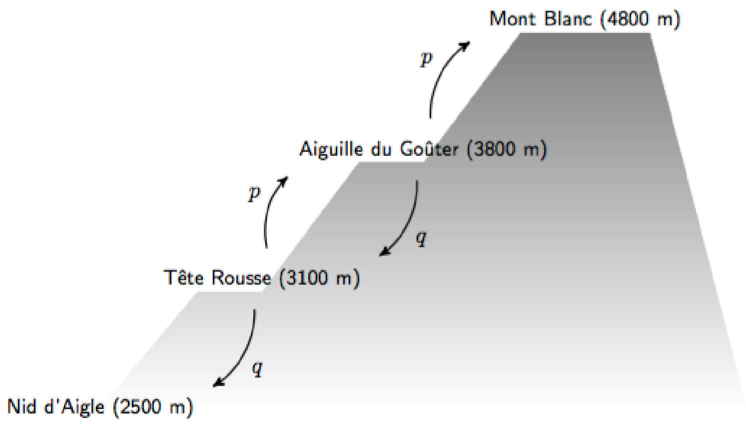
1. Le processus entre dans l'état S_2 pour la première fois en fonction du $k^{\text{ième}}$ pas d'itération.
2. Le processus n'entre jamais dans l'état S_4.
3. Le processus entre dans l'état S_2 et ressorte le pas d'itération suivant.
4. Le processus entre dans S_1 pour la première fois au troisième pas d'itération.
5. Le processus est dans l'état S_3 immédiatement après le $n^{\text{ième}}$ pas d'itération.

Problème 10

Montrer que si $\mathbf{P}^k$ a des colonnes identiques, alors $\mathbf{P}^j$ a des colonnes identiques pour tout $j \geq k$.

Problème 11

Un alpiniste veut faire l'ascension du Mont Blanc. Il part de la tête rousse à 3100 mètres d'altitude. Il aimerait bien aller à l'Aiguille du Goûter à 3800 mètres pour y passer la nuit mais il ne va y aller que si la météo est bonne. Si la météo est mauvaise alors il descend au Nid d'Aigle (2500 mètres) et abandonne le projet. Par contre si la météo est bonne il va pouvoir dormir à l'Aiguille du Goûter. Le lendemain, si la météo est bonne il va pouvoir aller au sommet du Mont Blanc (4800 mètres). Par contre il va redescendre à la Tête Rousse si la météo est mauvaise et ainsi de suite. On suppose que la météo est bonne avec une probabilité p et qu'elle est mauvaise avec une probabilité $q = 1 - p$ et qu'elle est indépendante de la météo des jours précédents.



1. Montrer que le problème peut être décrit par une chaîne de Markov absorbante.
2. Calculez sa matrice de transition.
3. Calculez la probabilité que l'alpiniste atteigne le sommet, en fonction de p.
4. Quelle est la valeur de p^* de p pour que l'alpiniste ait une chance sur deux d'atteindre le sommet ?
5. Calculez le nombre moyen de jours qu'il faut pour atteindre le sommet si $p = p^*$.

Problème 12

Deux joueurs A et B s'affrontent dans une partie de tennis. Chaque point joué est gagné par le joueur A avec une probabilité de 3/5, sinon il est gagné par B. On suppose les points indépendants. Initialement, les deux joueurs sont à égalité. Pour gagner la partie, un joueur doit obtenir une avance de deux points sur son opposant.

1. Modéliser le jeu par une chaîne de Markov absorbante à 5 états : Egalité (deuce), Avantage A, Avantage B, A gagne, et B gagne. Donner la matrice de transition de cette chaîne.
2. Montrer que la matrice fondamentale de la chaîne est donnée par

$$\mathbf{N} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 25 & 15 & 10 \\ 10 & 19 & 4 \\ 15 & 9 & 19 \end{pmatrix}$$

3. Calculer la probabilité que A gagne, si les joueurs sont initialement à égalité.

4. Calculer la durée moyenne du jeu si les joueurs sont initialement à égalité.

Problème 14

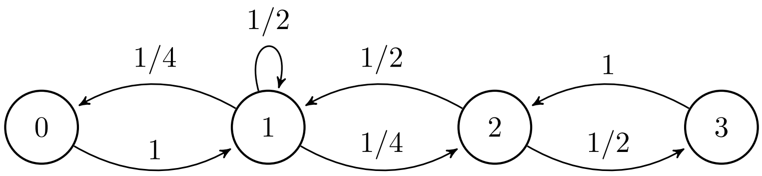
On considère une chaîne de Markov avec la matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/16 & 7/16 & 0 & 1/2 \\ 1/16 & 0 & 7/16 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1. Montrez que cette chaîne est irréductible
2. Calculez les probabilités d'état de la chaîne

Problème 15

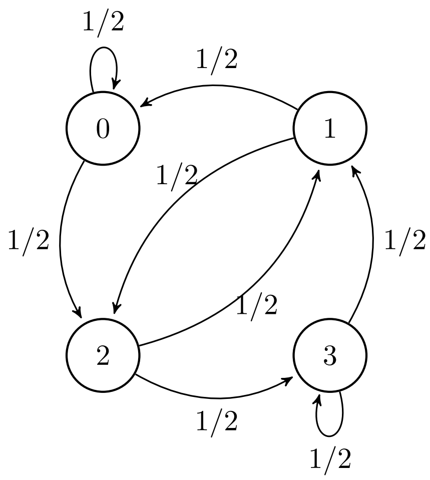
On considère la chaîne de Markov suivante :



1. Donnez la matrice de transition de cette chaîne de Markov
2. La chaîne de Markov est-elle irréductible ?
3. Quelles sont les probabilités d'état de cette chaîne de Markov (distribution stationaire) ?
4. La chaîne de Markov est-elle réversible ?

Problème 16

On considère la chaîne de Markov suivante :



1. Donnez la matrice de transition de cette chaîne de Markov
2. La chaîne de Markov est-elle irréductible ?

3. Quelles sont les probabilités d'état de cette chaîne de Markov (distribution stationaire)?
4. La chaîne de Markov est-elle réversible?

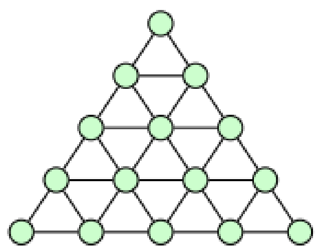
Problème 17

Le temps qu'il fait dans une certaine ville est classé en trois types : Pluie, neige et beau temps. On suppose que s'il pleut, il y a une chance sur trois qu'il pleuve le lendemain, une chance sur six qu'il neige, et une chance sur deux qu'il fasse beau. S'il neige, il y a une chance sur deux qu'il pleuve le lendemain, et une chance sur deux qu'il neige. S'il fait beau, il y a une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain, et trois chance sur quatre qu'il pleuve. On suppose que le temps du jour n ne dépend que du temps qu'il fait le jour $n-1$.

1. Formuler le problème comme une chaîne de Markov en temps discret. De quel type de chaîne s'agit-il?
2. Déterminer la probabilité asymptotique qu'il pleuve, qu'il neige ou qu'il fasse beau.
3. Quel est l'intervalle moyen entre deux jours de neige?

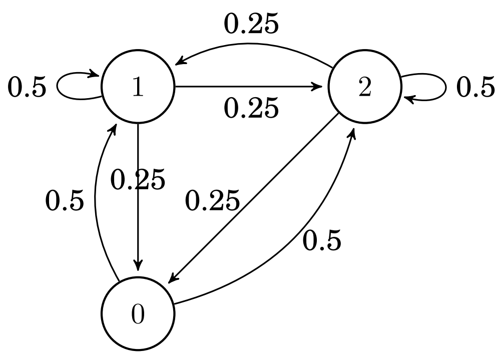
Problème 18

Une puce se déplace sur le réseau ci-dessous, en choisissant à chaque saut l'une des cases adjacentes, au hasard de manière uniforme. Déterminer le temps de récurrence moyen vers le coin inférieur gauche.



Problème 19

Soit la chaîne de Markov représentée par le diagramme suivant :



1. Trouvez la matrice de transition.
2. Est-ce que cette chaîne est irréductible?

3. Ecrivez le système d'équations qu'il faudra résoudre pour calculer les probabilités d'état (probabilités stationnaires).
4. Etant donné que les probabilités stationnaires de cette chaîne de Markov sont $(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (0.2, 0.4, 0.4)$, est-ce que la chaîne est réversible ?

Problème 20

Donnez les propriétés des chaînes de Markov discrètes suivantes, définies par leurs matrices de transition. Sont-elles

1. Irréductibles ?
2. Périodiques ?
3. Calculez $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ si possible. Commentez.

$$\text{(a) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.88 & 0.12 \\ 0.15 & 0.85 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \quad \text{(c) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$