

# Chaînes de Markov discrètes

Dr Stephan Robert

3 mars 2016



# Chaînes de Markov dicrètes

- ▶  $\{X_n\}$  : suite de variables aléatoires prenant des valeurs dans  $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ ,  $\mathcal{E}$  dénombrable.
- ▶ Propriété de **Markov** :

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

- ▶ Notation :  $X_n = i, i \in \mathcal{E}$
- ▶ Définition : **Probabilité de transition** :

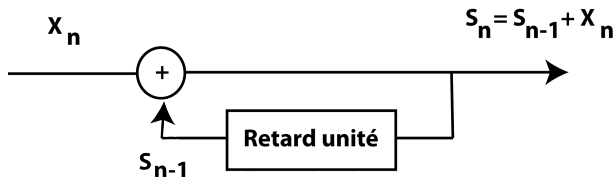
$$P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

# Exemple

Somme de variables aléatoires  $X_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , iid :

- ▶  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$
- ▶  $S_n = S_{n-1} + X_n$

Avec  $S_0 = 0$  nous remarquons que le processus est Markovien.

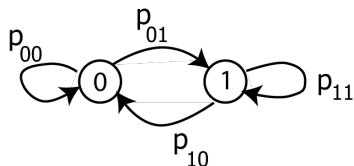


# Matrice et diagramme de transition

Nous pouvons écrire la **matrice de transition** de la chaîne en utilisant la notation suivante :

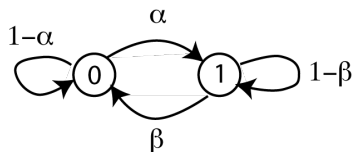
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0m} \\ p_{12} & p_{11} & \dots & p_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m0} & p_{m1} & \dots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

Il est souvent utile de dessiner le **diagramme des probabilités de transition** (ou **diagramme de transition**), par exemple pour  $m = 2$  :



## Exemple : ATM

Un créneau est soit vide soit plein suivant qu'il contienne ou non un paquet.



Matrice de transition (ou matrice stochastique) :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) = p_{00} & P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = p_{01} \\ P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) = p_{10} & P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = p_{11} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Observation importante :

- ▶  $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) + P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) = 1$
- ▶  $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) + P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) = 1$

Généralisation :

$$\sum_j P(X_{n+1} = j|X_n = i) = \sum_j p_{ij} = 1$$

D'où le nom “matrice stochastique” !



# Probabilités d'état

Sujet d'intérêt : Calcul des probabilités de transition après  $n$  transitions.

**Théorème** :

La matrice des probabilités de transition après  $n$  pas  $\mathbf{P}(n)$  est la puissance  $n$  de la matrice des probabilités de transition  $\mathbf{P}$ , soit  $\mathbf{P}(n) = \mathbf{P}^n$ .

## Démonstration du théorème

Probabilité de passer de l'état  $i$  ( $n=0$ ) à l'état  $j$  ( $n=2$ ) en passant par l'état  $k$  ( $n=1$ ) :

$$P(X_2 = j, X_1 = k | X_0 = i)$$

$$= \frac{P(X_2 = j, X_1 = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)}$$

$$= \frac{P(X_2 = j | X_1 = k) P(X_1 = k | X_0 = i) P(X_0 = i)}{P(X_0 = i)}$$

$$= P(X_2 = j | X_1 = k) P(X_1 = k | X_0 = i)$$

## Probabilités de transition après $n$ pas (3)

Finalement :

$$P(X_2 = j, X_1 = k | X_0 = i) = p_{ik}(1)p_{kj}(1)$$

$p_{ij}(2)$  est la probabilité d'aller de  $i$  à  $j$  en sommant tous les états  $k$  intermédiaires :

$$p_{ij}(2) = \sum_k p_{ik}(1)p_{kj}(1) \quad \forall i, j$$

Cet ensemble d'équations montre que  $\mathbf{P}(2)$  est obtenue en multipliant la matrice  $\mathbf{P}(1)$  par elle-même :

$$\mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(1) \cdot \mathbf{P}(1) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}^2.$$

## Equation de Chapman-Kolmogorov

$$P(n) = P(n-1).P$$

et

$$P^{n+m} = P^n P^m$$

avec  $n, m \geq 0$ .

Quelle est la **probabilité** de se trouver dans un **état donné** de la chaîne de Markov à un **temps arbitraire**  $n$ ?

Notation :

$$\mathbf{p}(n) = ( p_1(n) \quad p_2(n) \quad \dots \quad p_l(n) )$$

Observation :

$$p_j(n) = \sum_i P(X_n = j | X_{n-1} = i) P(X_{n-1} = i) = \sum_i p_{ij} \cdot p_i(n-1)$$

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1) \cdot \mathbf{P}$$

## Probabilités d'état (2)

Lorsque  $n$  devient grand,

$$\mathbf{p}(n) \approx \mathbf{p}(n - 1)$$

On va écrire

$$\mathbf{p}(\infty) = \boldsymbol{\pi}$$

et donc

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{P}$$

avec  $\sum_i \pi_i = 1$

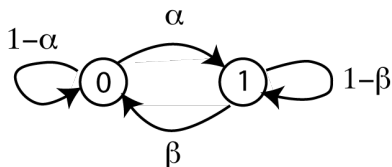


Figure: Chaîne de Markov à deux états

Matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$



## Exemple (2)

▶  $\alpha = 0.1$

▶  $\beta = 0.3$

Calculons  $\mathbf{P}^n$  :

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.72 \\ 0.24 & 0.76 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0.2512 & 0.7488 \\ 0.2496 & 0.7504 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{10} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

## Exemple (3)

Observation :  $\mathbf{P}^n$  converge bien quand  $n$  devient grand !

$$\mathbf{P}^n \rightarrow \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

quand  $n \rightarrow \infty$ .

**A chercher** : Probabilités d'état stationnaires.

$$\pi = \pi \mathbf{P}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

## Exemple (3)

En explicitant :

$$\pi_0 = \pi_0(1 - \alpha) + \pi_1\beta$$

$$\pi_1 = \pi_0\alpha + \pi_1(1 - \beta)$$

or il y a un problème ! Les deux équations sont linéairement dépendantes ! Il faut se rappeler que

$$\sum_i \pi_i = 1$$

## Exemple (4)

En résolvant ces deux équations :

$$\pi_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

et avec  $\alpha = 0.1$  et  $\beta = 0.3$  :

▶  $\pi_0 = 1/4$

▶  $\pi_1 = 3/4$

Soit une matrice de transition

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Trouvez les probabilités d'état et dessinez la chaîne de Markov.

# Classification des états

## Définitions :

- ▶ Un état  $j$  est dit **accessible** depuis l'état  $i$  si  $p_{ij}(n) > 0, n \geq 0$ .
- ▶ Si tous les états d'une chaîne de Markov sont accessibles, on dit qu'ils appartiennent à une même classe et la chaîne est dite **irréductible**.
- ▶ Un état est dit **récurent** si la probabilité d'y retourner est égale à 1. Dans le cas contraire l'état est dit **transitoire**.
- ▶ Un état est dit **absorbant** lorsque la probabilité de rester dans l'état est égale à 1.

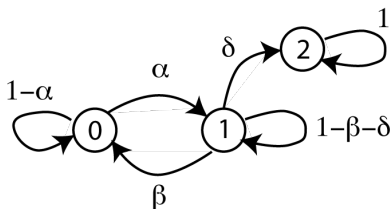
## Observations :

- ▶ Un état **récurrent** est visité un **nombre infini** de fois. Un état **transitoire** n'est visité qu'un **nombre fini** de fois.
- ▶ Si un état est récurrent alors tous les états de sa classe sont aussi récurrents. La **récurrence** est une propriété de la classe.
- ▶ Si on démarre la chaîne de Markov dans un état récurrent alors on y reviendra un nombre infini de fois.



# Exemple

Chaîne de Markov à trois états dont un est absorbant, avec  $\alpha, \beta, \delta > 0$  :



Temps jusqu'à la première visite de l'état  $i$  à partir du démarrage de la chaîne :

$$T_j = \inf\{n \in \mathbb{N}^+ : X(n) = j\}$$

Etat récurrent :

$$P(T_j < \infty | X_0 = j) = 1$$

Etat **récurrent positif** :

$$E(T_j | X_0 = j) < \infty$$

Etat **récurrent nul** :

$$E(T_j | X_0 = j) = \infty$$

Proportion de temps passé dans un état :

$$\pi_i = \frac{1}{E[T_j | X_0 = j]}$$

Chaîne de Markov **périodique** : Tous les états sont visités à des instants qui sont des multiples d'un nombre entier  $d > 1$ .

**Définition** : On dit qu'une chaîne de Markov est **ergodique** si elle est apériodique et que tous ses états sont récurrents positifs.

# Exemple 1

Chaîne de Markov à deux états :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

L'état 0 est récurrent :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n) = 1 + 1 + \dots + 1 = \infty.$$

L'état 1 est transitoire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{11}(n) = 0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 + \dots = 2 < \infty.$$

## Exemple 2

Chaîne de Markov à deux états :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La chaîne de Markov est périodique, de période  $d = 2$  car  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^6 = \dots = \mathbf{I}$

Dessinez les diagrammes de transition des chaînes de Markov suivantes, pour :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Donnez également les propriétés des différents états des chaînes de Markov.

# Réversibilité dans le temps et calcul du temps d'absorption

Soit une chaîne de Markov ergodique ayant une matrice de transition  $\mathbf{P}$  et une densité de probabilité à l'état stationnaire  $\pi$

$$\begin{aligned} P(X_{n-1} = j | X_n = i, X_{n+1} = i_1, \dots, X_{n+k} = i_k) &= \\ &= \frac{P(X_{n-1} = j, X_n = i, X_{n+1} = i_1, \dots, X_{n+k} = i_k)}{P(X_n = i, X_{n+1} = i_1, \dots, X_{n+k} = i_k)} \\ &= \frac{\pi_j p_{ji} p_{i i_1} \dots p_{i_{k-1}, i_k}}{\pi_i p_{i i_1} \dots p_{i_{k-1}, i_k}} \\ &= \frac{\pi_j p_{ji}}{\pi_i} = P(X_{n-1} = j | X_n = i) = q_{ij} \end{aligned}$$



## Observations :

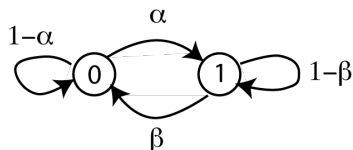
- ▶ Le processus à l'envers est également markovien !
- ▶ Les probabilités d'état stationnaires sont identiques.
- ▶ On déduit que  $\forall i, j \in \mathcal{E}$ ,

$$\pi_i q_{ij} = \pi_j p_{ji}$$

- ▶ La chaîne de Markov est réversible **réversible** si  $\mathbf{P}$  est telle que  $q_{ij} = p_{ij}, \forall i, j \in \mathcal{E}$

# Exemple : Chaîne réversible

Chaîne de Markov à 2 états



Probabilités d'états stationnaires :

$$\pi_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

$$\pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

## Exemple : Chaîne réversible (2)

En calculant les  $q_{ij}$  :

- ▶  $q_{00} = p_{00}$
- ▶  $q_{11} = p_{11}$
- ▶  $q_{01} = \pi_1 p_{10} / \pi_0 = \alpha = p_{01}$
- ▶  $q_{10} = \pi_0 p_{01} / \pi_1 = \beta = p_{10}$

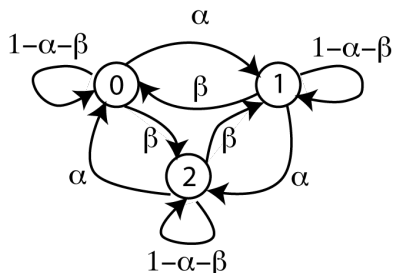
Donc

$$q_{ij} = p_{ij}$$

Ça signifie que la chaîne est **réversible** !

# Exemple : Chaîne non réversible

Chaîne de Markov à 3 états



Par symétrie, nous avons :

$$\pi = \left( \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right)$$

## Exemple : Chaîne non réversible (2)

Nous pouvons facilement déduire les  $q_{ij}$ ,  $\forall i, j \in \{0, 1, 2\}$  :

- ▶  $q_{00} = q_{11} = q_{22} = 1 - \alpha - \beta$
- ▶  $q_{12} = p_{21} = \beta$

Avec  $q_{12} \neq p_{12}$ , la chaîne est donc **non réversible**, sauf lorsque  $\alpha = \beta$ .

1. Trouvez une chaîne de Markov périodique non réversible.
2. Trouvez une chaîne de Markov périodique réversible

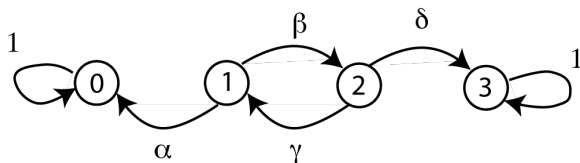
**Notation** :  $a_{i,A} = P(X(n) \in A \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} | X(0) = i)$

**Développement** :

$$\begin{aligned} a_{i,A} &= P(X(n) \in A \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} | X_0 = i) \\ &= \sum_{j=0}^m P(X(n) \in A \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} | X_0 = i, X_1 = j) \cdot P(X_1 = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{j=0}^m P(X(n) \in A \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N} | X_1 = j) p_{ij} \\ &= \sum_{j=0}^m a_j p_{ij} \end{aligned}$$

# Exemple

Chaîne de Markov à quatre états dont deux sont absorbants





## Exemple (2)

Probabilité d'être absorbé par l'état 0 :

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \sum_{j=0}^3 p_{ij} a_j = p_{10} a_0 + p_{11} a_1 + p_{12} a_2 + p_{13} a_3 = \alpha + \beta a_2$$

$$a_2 = \sum_{j=0}^3 p_{ij} a_j = p_{20} a_0 + p_{21} a_1 + p_{22} a_2 + p_{23} a_3 = \gamma a_1$$

$$a_3 = 0$$

Nous obtenons deux équations à deux inconnues, faciles à résoudre :

$$a_1 = \frac{\alpha}{1-\beta\gamma}, \quad a_2 = \frac{\gamma\alpha}{1-\beta\gamma}$$

## Exemple (3)

Probabilité d'être absorbé par l'état 3, même combat :

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = \sum_{j=0}^3 p_{ij} a_j = \alpha a_0 + \beta a_2 = \beta a_2$$

$$a_2 = \sum_{j=0}^3 p_{ij} a_j = \gamma a_1 + \delta a_3 = \gamma a_1 + \delta$$

$$a_3 = 1$$

$$a_1 = \frac{\beta\delta}{1-\beta\gamma}, \quad a_2 = \frac{\delta}{1-\beta\gamma}$$

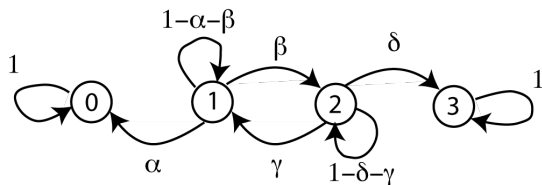
## Calcul du temps moyen jusqu'à l'absorption

$$\begin{aligned}\mu_i &= E[\text{nombre de transitions jusqu'à l'absorption,} \\ &\quad \text{en partant de } i] \\ &= E[\min\{n \geq 0 \mid X_n \text{ est récurrent}\} \mid X_0 = i] \\ &= \mu_i = 1 + \sum_{j=0}^m p_{ij} \mu_j\end{aligned}$$

Notes :

- ▶ Les états  $i$  de la formule sont tous transitoires.
- ▶  $\mu_i = 0$  si  $i$  est un état absorbant.

# Exemple : Chaîne de Markov à quatre états dont deux sont absorbants

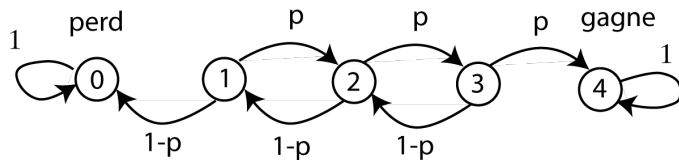


$$\mu_1 = \frac{\beta + \delta + \gamma}{(\delta + \gamma)(\alpha + \beta) - \gamma\beta}$$
$$\mu_2 = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{(\delta + \gamma)(\alpha + \beta) - \gamma\beta}$$

Application numérique : Avec  $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0.3$ , on trouve que  $\mu_1 = \mu_2 = 10/3$

# La ruine du joueur

Chaîne de Markov représentant le modèle de la "ruine du joueur", avec  $m = 4$ .



# La ruine du joueur (2)

Graphe de  $1 - a_i$  (probabilité de gagner) en fonction du gain  $m$  et du point de départ dans la chaîne de Markov,  $i$ , avec  $\rho = 0.52/0.48 = 1.0833$

Probabilité de gagner

