

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'état

Comportement  
asymptotique

Classification  
des états

# Modélisation stochastique, Chaînes de Markov continues

Stephan Robert, HEIG-Vd

23 octobre 2009

## Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'étatComportement  
asymptotiqueClassification  
des états

- 1 Probabilités de transition
- 2 Générateur
- 3 Probabilités d'état
- 4 Comportement asymptotique
- 5 Classification des états

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'état

Comportement  
asymptotique

Classification  
des états

# Probabilités de transition

## Outline

### Probabilités de transition

### Générateur

### Probabilités d'état

### Comportement asymptotique

### Classification des états

- $\{X_n\}$  : suite de variables aléatoires prenant des valeurs dans  $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ ,  $\mathcal{E}$  dénombrable.
- La probabilité de transition d'un état (i) à l'instant  $t$  à un autre état (j) à l'instant  $t + \tau$  ne dépend que de la différence de temps  $\tau$  :

$$P(X_{t+\tau} = j | X_t = i) = p_{ij}(\tau)$$

- Processus homogène :

$$P(X_{t+\tau} = j | X(t) = i) = P(X_\tau = j | X_0 = i) = p_{ij}(\tau)$$

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'étatComportement  
asymptotiqueClassification  
des états

- Matrice de transition :

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \dots & p_{0m}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \dots & p_{1m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m0}(t) & p_{m1}(t) & \dots & p_{mm}(t) \end{pmatrix}$$

- Remarque :

$$\mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} p_{00}(0) = 1 & p_{01}(0) = 0 & \dots & p_{0m}(0) = 0 \\ p_{10}(0) = 0 & p_{11}(0) = 1 & \dots & p_{1m}(0) = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m0}(0) = 0 & p_{m1}(0) = 0 & \dots & p_{mm}(0) = 1 \end{pmatrix}$$

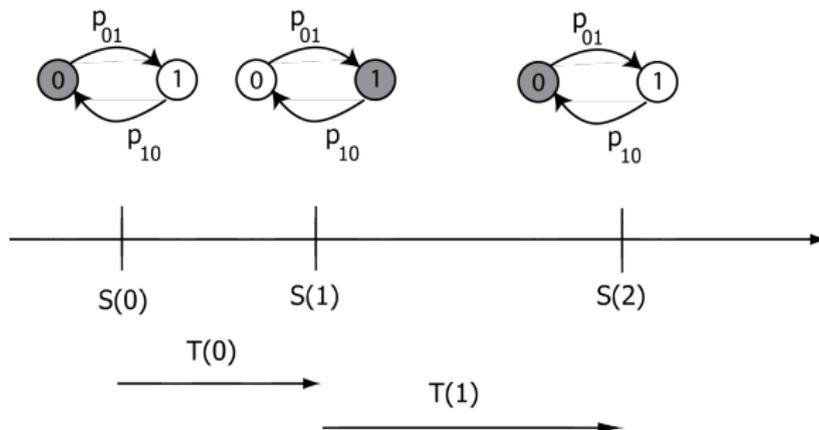
# Vecteur d'état

- Outline
- Probabilités de transition
- Générateur
- Probabilités d'état
- Comportement asymptotique
- Classification des états

- Vecteur des probabilités d'état :

$$\vec{\pi}(t) = ( \pi_0(t) \quad \pi_1(t) \quad \dots \quad \pi_n(t) )$$

- *Jump* et *Holding* times (processus de comptage et durées d'attente)



## Outline

Probabilités  
de transition

## Générateur

Probabilités  
d'étatComportement  
asymptotiqueClassification  
des états

- Chaîne de Markov **régulière** :

$$\sum_{i=0}^{\infty} T(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \infty$$

- Equations de **Chapman-Kolmogorov**

$$\mathbf{P}(t + \tau) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(\tau)$$

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'état

Comportement  
asymptotique

Classification  
des états

# Générateur

Soient les probabilités de transition :

$$\begin{aligned}
 P(X_{t+\epsilon} = j | X_t = i) &= p_{ij}(\epsilon) = 1 + q_{ij}\epsilon + o(\epsilon) & i = j \\
 P(X_{t+\epsilon} = j | X_t = i) &= p_{ij}(\epsilon) = q_{ij}\epsilon + o(\epsilon) & i \neq j
 \end{aligned}$$

En négligeant pour l'instant  $o(\epsilon)$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(\epsilon) &= \begin{pmatrix} p_{00}(\epsilon) & p_{01}(\epsilon) & \dots & p_{0m}(\epsilon) \\ p_{10}(\epsilon) & p_{11}(\epsilon) & \dots & p_{1m}(\epsilon) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m0}(\epsilon) & p_{m1}(\epsilon) & \dots & p_{mm}(\epsilon) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 + \epsilon q_{00} & \epsilon q_{01} & \dots & \epsilon q_{0m} \\ \epsilon q_{10} & 1 + \epsilon q_{11} & \dots & \epsilon q_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \epsilon q_{m0} & \epsilon q_{m1} & \dots & 1 + \epsilon q_{mm} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

# Générateur (2)

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'état

Comportement  
asymptotique

Classification  
des états

Probabilités de transition :

- $p_{00}(\epsilon) = 1 + \epsilon q_{00}$
- $p_{01}(\epsilon) = \epsilon q_{01}$

Intensités ("rates") :

- $q_{00} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (p_{00}(\epsilon) - 1) / \epsilon$
- $q_{01} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_{01}(\epsilon) / \epsilon$

Générateur :

$$Q = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & \dots & q_{0m} \\ q_{10} & q_{11} & \dots & q_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m0} & q_{m1} & \dots & q_{mm} \end{pmatrix}$$

# Générateur (3)

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'état

Comportement  
asymptotique

Classification  
des états

Processus Markovien : Temps de séjour distribués  
exponentiellement :

$$P(T_i > \epsilon) = e^{-\nu_i \epsilon}$$

Approximation :

$$\begin{aligned} P(T_i > \epsilon) &\approx 1 - \frac{\nu_i \epsilon}{1!} + \frac{\nu_i^2 \epsilon^2}{2!} - \dots \\ &\approx 1 - \nu_i \epsilon + o(\epsilon) \end{aligned}$$

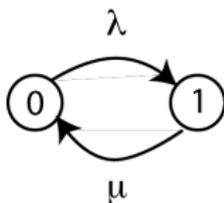
On a :

$$p_{ii}(\epsilon) \approx 1 - \nu_i \epsilon$$

**Définition** :  $q_{ii} = -\nu_i$

- La représentation de la chaîne de Markov ayant un générateur  $\mathbf{Q}$  se fait de la façon suivante :
  - Une flèche part de l'état  $i$  pour aboutir à l'état  $j$  et est marquée par  $q_{ij}$  et montre l'intensité (rate) de transition entre ces deux états.
- Quand l'intensité (rate) est nulle alors aucune flèche n'est dessinée
- **Temps de séjour moyen** dans l'état  $i$  :  $-1/q_{ii}$
- Quand la chaîne de Markov **change d'état**, la probabilité de se retrouver ensuite dans l'état  $j$  est  $-q_{ij}/q_{ii}$ .

Chaîne de Markov continue à deux états :



Modèle : File d'attente

- 0 : aucun client
- 1 : un client est en train de se faire servir
- Temps moyen de service : 2 minutes
- Temps moyen d'inoccupation du système : 3 minutes.

## Exemple (2)

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'étatComportement  
asymptotiqueClassification  
des états

Donc nous avons :

- $-1/q_{11} = 2 = 1/\mu$
- $-1/q_{00} = 3 = 1/\lambda$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/3 \text{ min}^{-1} & 1/3 \text{ min}^{-1} \\ 1/2 \text{ min}^{-1} & -1/2 \text{ min}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Observation : La **somme** des éléments d'une ligne du générateur est **nulle**.

## Exemple 2

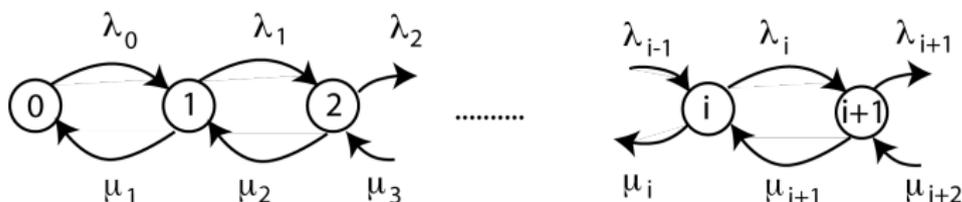
Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'étatComportement  
asymptotiqueClassification  
des états

Processus de naissance et de mort :



$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}
 -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & \dots \\
 0 & 0 & \dots & \mu_i & -(\lambda_i + \mu_i) & \lambda_i & 0 & \dots
 \end{pmatrix}$$

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'état

Comportement  
asymptotique

Classification  
des états

# Probabilités d'état

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'étatComportement  
asymptotiqueClassification  
des états

**Définition** :  $\pi_i(t) = P(X_t = i)$

$$\begin{aligned}\pi_i(t + \epsilon) &= P(X_{t+\epsilon} = i) \\ &= \sum_{k=0}^m P(X_{t+\epsilon} = i | X_t = k) P(X_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^m p_{ki}(\epsilon) \pi_k(t)\end{aligned}$$

et si soustrayons  $\pi_i(t)$  de chaque côté, nous obtenons

$$\begin{aligned}\pi_i(t + \epsilon) - \pi_i(t) &= \sum_{k=0}^m p_{ki}(\epsilon) \pi_k(t) - \pi_i(t) \\ &= \sum_{k=0, k \neq i}^m p_{ki}(\epsilon) \pi_k(t) + p_{ii}(\epsilon) \pi_i(t) - \pi_i(t)\end{aligned}$$

et si nous divisons le tout par  $\epsilon$ ,

$$\frac{\pi_i(t + \epsilon) - \pi_i(t)}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \sum_{k=0, k \neq i}^m p_{ki}(\epsilon) \pi_k(t) + (p_{ii}(\epsilon) - 1) \pi_i(t)$$

Mais

- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_{ki}(\epsilon)/\epsilon = q_{ki}$ ,  $k \neq i$  et  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (p_{ii}(\epsilon) - 1)/\epsilon = q_{ii}$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_i(t)}{dt} &= \sum_{k=0, k \neq i}^m q_{ki} \pi_k(t) + q_{ii} \pi_i(t) \\ &= \sum_{k=0}^m q_{ki} \pi_k(t) \end{aligned}$$

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'état

Comportement  
asymptotique

Classification  
des états

## Equations de Chapman-Kolmogorov

Sous forme matricielle :

$$\frac{d\vec{\pi}(t)}{dt} = \vec{\pi}(t)\mathbf{Q}$$

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'état

Comportement  
asymptotique

Classification  
des états

# Comportement asymptotique

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'étatComportement  
asymptotiqueClassification  
des états

Observation :  $\pi_i(t) \rightarrow \pi_i, i \in \mathcal{E}$  quand  $t \rightarrow \infty$

Implication :

$$\frac{d\vec{\pi}(t)}{dt} = \vec{0}$$

A l'équilibre :

$$\vec{\pi}\mathbf{Q} = \vec{0}$$

Ces équations sont appelées les **équations de balance**.

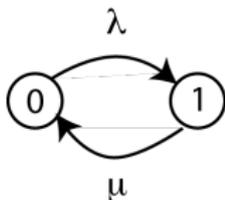
Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'étatComportement  
asymptotiqueClassification  
des états

## Chaîne de Markov à deux états



Le générateur est donné par

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Equations de Chapman-Kolmogorov

$$\left( \frac{d\pi_0(t)}{dt} \quad \frac{d\pi_1(t)}{dt} \right) = \left( \pi_0(t) \quad \pi_1(t) \right) \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

## Exemple (2)

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'état

Comportement  
asymptotique

Classification  
des états

Développement :

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt} + (\lambda + \mu)\pi_0(t) = \mu$$

$$\frac{d\pi_1(t)}{dt} + (\lambda + \mu)\pi_1(t) = \lambda$$

Solutions générales (ED premier ordre) :

$$\pi_0(t) = C_0 e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\pi_1(t) = C_1 e^{-(\lambda + \mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

## Exemple (3)

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'étatComportement  
asymptotiqueClassification  
des états

Au temps  $t = 0$

$$\pi_0(0) = C_0 + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\pi_1(0) = C_1 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

En remplaçant nous obtenons :

$$\pi_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \left( \pi_0(0) - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) e^{-(\lambda + \mu)t}$$

$$\pi_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \left( \pi_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) e^{-(\lambda + \mu)t}$$

Quand  $t \rightarrow \infty$

$$\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \qquad \pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

## Exemple 2

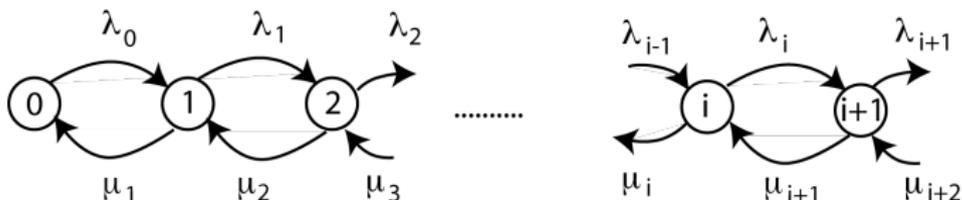
Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'étatComportement  
asymptotiqueClassification  
des états

## Processus de naissance et de mort



$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_i & -(\lambda_i + \mu_i) & \lambda_i & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

## Exemple 2 (2)

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'état

Comportement  
asymptotique

Classification  
des états

Equations de balance globales ( $\vec{\pi}\mathbf{Q} = \vec{0}$ ) :

$$\begin{aligned} -\pi_0\lambda_0 + \pi_1\mu_1 &= 0 \\ \pi_0\lambda_0 - \pi_1(\lambda_1 + \mu_1) + \pi_2\mu_2 &= 0 \\ \pi_1\lambda_1 - \pi_2(\lambda_2 + \mu_2) + \pi_3\mu_3 &= 0 \\ &\dots = \dots \end{aligned}$$

Première équation :

$$\pi_1 = \pi_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1}$$

En remplaçant dans la deuxième équation :

$$\pi_2 = \pi_0 \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}$$

## Exemple 2 (3)

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'étatComportement  
asymptotiqueClassification  
des états

Généralement :

$$\pi_i = \pi_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}$$

Mais la somme de toutes les probabilités d'état est égale à 1 :

$$\pi_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \right) = 1$$

Alors

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}}$$

si

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} < \infty$$

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'état

Comportement  
asymptotique

Classification  
des états

# Classification des états

Outline

Probabilités  
de transition

Générateur

Probabilités  
d'état

Comportement  
asymptotique

Classification  
des états

## Définitions :

- Un état  $j$  est dit **accessible** depuis l'état  $i$  si  $p_{ij}(n) > 0$ ,  $n \geq 0$ .
- Si tous les états d'une chaîne de Markov sont accessibles, on dit qu'ils appartiennent à une même classe et la chaîne est dite **irréductible**.
- Un état est dit **récurent** si la probabilité d'y retourner est égale à 1. Dans le cas contraire l'état est dit **transitoire**.

## Observations :

- Un état **récurent** est visité un **nombre infini** de fois. Un état **transitoire** n'est visité qu'un **nombre fini** de fois.
- Une chaîne de Markov irréductible et apériodique est **ergodique**.