Télétrafic (TTR)

TRAVAIL ECRIT

26 mai 2016

NOM :..

PRENOM :..

Max : 37 points

Problème 1 (7 points)

Fortune d'un joueur A contre un joueur B. Considérons une partie entre deux joueurs A et B dont la somme de leurs fortunes est égale à N francs. A chaque partie le joueur A gagne 1 franc de son adversaire avec une probabilité p et donne un franc à B avec une probabilité $q = 1 - p$. Le jeu s'arrête dès lors que l'un des joueurs est ruiné. On note X_n la fortune du joueur A à l'instant n (celle du joueur B est bien sûr $N - n$). On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Donnez la matrice de transition dans le cas général. (1 point)
2. Donnez la matrice de transition dans le cas où $N = 4, p = 0.5$. (1 point)
3. Dessinez la chaîne de Markov discrète dans le cas général. (1 point)
4. Que pouvez-vous dire des états N et 0. (1 point)
5. Trouver les probabilités d'état stationnaires. (1 point)
6. Est-ce que cette chaîne est réversible ? (1 point)
7. Dans le cas où $N = 3, p = 0.5$ quelle est la probabilité d'absorption de l'état 0 ? (1 point)

Problème 2 (3 points)

Considérez une chaîne de Markov à trois états ayant la matrice de transition suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dessinez cette chaîne de Markov. (1 point)
2. Classifiez les états. (1 point)
3. Est-ce que cette chaîne est ergodique ? (1 point)

Problème 3 (4 points)

Considérez un processus de comptage S_n. A chaque pas il peut soit augmenter de 1 unité avec une probabilité p, soit garder la même valeur, avec une probabilité $1 - p$.

1. Dessinez cette chaîne de Markov. (1 point)
2. Donnez la matrice de transition. (1 point)
3. Trouver les probabilités d'état stationnaires. (1 point)
4. Est-ce que la chaîne de Markov est périodique ? Ergodique ? Irréductible ? (1 point)

Problème 4 (4 points)

Nous avons une marche aléatoire qui peut être représentée par une chaîne de Markov avec les probabilités de transition suivantes : $p_{01} = p$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{00} = q$, $p_{i,i-1} = q$, $p_{M,M-1} = q$ et $p_{M,M} = p$. Trouvez les probabilités de transition pour la version de cette chaîne ayant le temps inversé. Est-ce que le processus est réversible ? Indication : nous savons de l'exercice 5, série 1 (corrigé avec M. Ciani) que $\pi_i = (p/q)^i \pi_0$.

Problème 5 (4 points)

Donnez les propriétés des chaînes de Markov discrètes suivantes, définies par leurs matrices de transition. Sont-elles

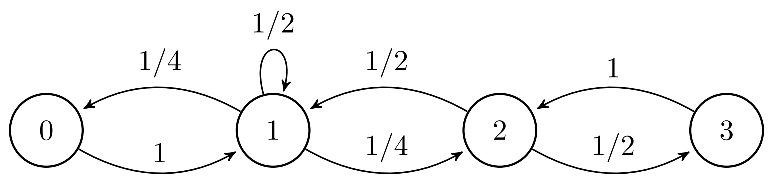
1. Irréductibles ?
2. Périodiques ?

$$\text{(a) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \text{(b) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{(c) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d) } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Problème 6 (4 points)

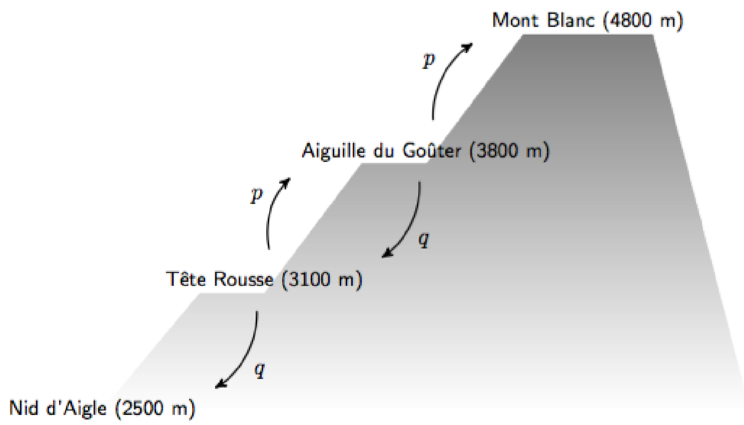
On considère la chaîne de Markov suivante :



1. Donnez la matrice de transition de cette chaîne de Markov. (1 point)
2. La chaîne de Markov est-elle irréductible ? (1 point)
3. Quelles sont les probabilités d'état de cette chaîne de Markov (distribution stationnaire) ? (4 point)
4. La chaîne de Markov est-elle réversible ? (1 point)

Problème 7 (7 points)

Un alpiniste veut faire l'ascension du Mont Blanc. Il part de la tête rousse à 3100 mètres d'altitude. Il aimerait bien aller à l'Aiguille du Goûter à 3800 mètres pour y passer la nuit mais il ne va y aller que si la météo est bonne. Si la météo est mauvaise alors il descend au Nid d'Aigle (2500 mètres) et abandonne le projet. Par contre si la météo est bonne il va pouvoir dormir à l'Aiguille du Goûter. Le lendemain, si la météo est bonne il va pouvoir aller au sommet du Mont Blanc (4800 mètres). Par contre il va redescendre à la Tête Rousse si la météo est mauvaise et ainsi de suite. On suppose que la météo est bonne avec une probabilité p et qu'elle est mauvaise avec une probabilité $q = 1 - p$ et qu'elle est indépendante de la météo des jours précédents.



1. Montrer que le problème peut être décrit par une chaîne de Markov absorbante. (1 point)
2. Calculez sa matrice de transition. (1 point)
3. Calculez la probabilité que l'alpiniste atteigne le sommet, en fonction de p. (1 point)
4. Quelle est la valeur de p^* de p pour que l'alpiniste ait une chance sur deux d'atteindre le sommet ? (2 points)
5. Calculez le nombre moyen de jours qu'il faut pour atteindre le sommet si $p = p^*$. (2 points)