Modélisation Stochastique

HAUTE ECOLE SPÉCIALISÉE DE LA SUISSE OCCIDENTALE
Avenue de Provence 6, 1000 Lausanne, Suisse

8 décembre 2009

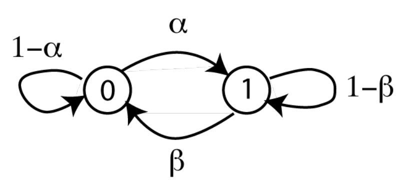
Stephan Robert, HEIG-Vd

SERIE 9

Files d'attente et Chaînes de Markov : Simulations

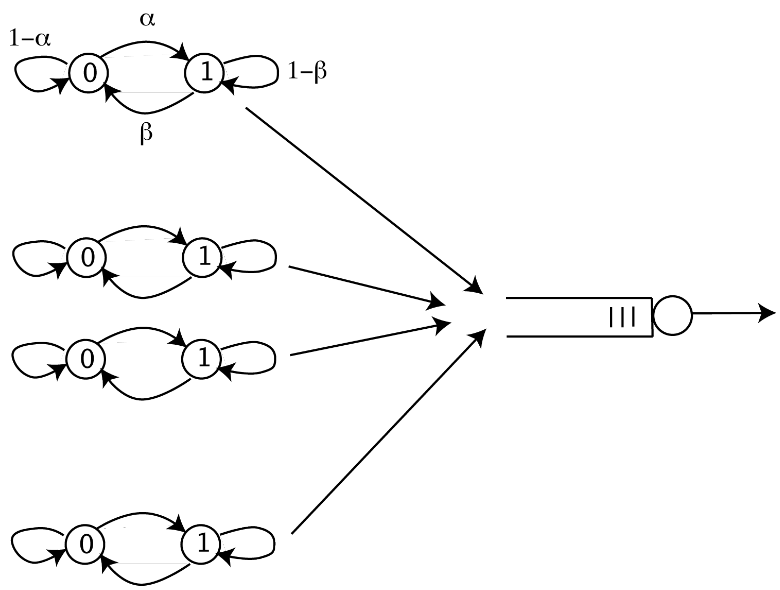
Problème 1

Simulez une chaîne de Markov à 2 états et donnez ("graphez") plusieurs trajectoires.



Problème 2

Simulez une somme de N chaînes de Markov à 2 états (paramètres α, β, N). Le trafic ainsi généré constituera l'entrée d'une file d'attente à serveur déterministe (s paquets/seconde tant qu'il y a des paquets dans le tampon).
Estimez la probabilité de perte en fonction de L (longueur de la file d'attente). L'estimation de la probabilité de perte devient raisonnable si on a au moins 20 pertes. Estimez les intervalles de confiance pour la probabilité de perte. il s'est agit d'un problème concret de dimensionement de mémoires de commutateurs ATM.



Problème 3

On a une chaîne de Markov avec la matrice de transition suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

- Dessinez la chaîne de Markov
- Simulez la chaîne de Markov en prenant 3 conditions initiales différentes (en partant de l'état 1, 2 et 3). Plottez $\vec{\pi}$ en fonction de n. Commentez.

Problème 4

Considérez la chaîne de Markov suivante : Vous allez au casino avec F francs (multiple de 10 francs). Vous jouez et pariez 10 francs à chaque fois. X_n est votre fortune après le n^{eme} jeu. $X_n \in \{0, 10, 20, \cdots\}$ et l'état 0 est absorbant, $P(X_{n+k}|X_k = 0) = 0 \; \forall n > 0$. La chaîne n'est pas irréductible. Ce qui est demandé : Graphe en 3D de la probabilité d'avoir une fortune $X_l$en partant de $X_i = F$ après m coups (m variant de 10 à 1000).

Problème 5 (facultatif)

Chaîne d'Ehrenfest. Vous imaginez deux boites avec k balles dans une boite et $n - k$ balles dans l'autre boite. Vous prenez une balle au hasard dans une boite et la transférez dans l'autre boite. X_n est le nombre de balles dans la boite 1 au temps n. $X_n \in \{0, 1, 2, \cdots, r\}$ et $p_{k,k+1} = \frac{r-k}{r}$ et $p_{k,k-1}$

Modélisation Stochastique

Problème 6 (facultatif)

Un site contenant un moteur de recherche reçoit 500 requêtes/seconde. La charge est équitablement distribuée sur N serveurs. Chaque serveur peut traiter 20 requêtes/seconde en moyenne et est capable de traiter 200 connexions simultanément (ensuite les connexions sont refusées). Les planificateurs du site se demandent combien de serveurs il faut prévoir pour que le temps de réponse n'excède pas 2 secondes et que la probabilité de perte soit inférieure à 2%. Tracez le graphe du temps de réponse moyen en fonction du nombre de serveurs N. Quelle est votre analyse ? Combien faut-il de serveurs ? Et si un serveur tombe en panne, que se passe-t-il ?

Problème 7

Nous avons une cellule avec 19 canaux. L'intensité du trafic de chaque utilisateur est de 0.1 Erlang. Simulez l'occupation de la cellule pour 60/80/100/120/140 utilisateurs. Estimez la probabilité de perte dans chacun des cas et tracez la en fonction du nombre d'utilisateurs.

Problème 8 (facultatif)

Simulez une file d'attente M/M/1/10 avec $\lambda = 1000$ clients(cellules)/seconde et $1/\mu = 0.5$ ms. Estimez le nombre moyen de cellules dans le système et vérifiez-le théoriquement. Simulez une file M/D/1/10 avec les mêmes paramètres et estimez le nombre moyen de cellules dans le système. Comparez les résultats.