Modélisation Stochastique

HAUTE ECOLE SPÉCIALISÉE DE LA SUISSE OCCIDENTALE
Avenue de Provence 6, 1000 Lausanne, Suisse

3 novembre 2009

Stephan Robert, HEIG-Vd

SERIE 7

Processus de Bernoulli, Poisson et Gauss

Remarque : Faire trois problèmes au choix !

Problème 1

Un signal $X(t)$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. Les instants auxquels il change de valeur forment un processus de Poisson de paramètre λ. Calculez $P(X(t) = 1)$ si la valeur initiale du signal vaut 1. Calculez également $P(X(t) = 1)$ lorsque la valeur initiale du signal vaut 0. Faites un graphe de $P(X(t) = 1)$ dans les deux cas !

Problème 2

Nous avons un quadrimoteur dont chaque moteur a un taux de défaillance égal à λ (loi de distribution exponentielle). L'avion arrive à destination si au moins deux moteurs fonctionnent. Calculez la probabilité que l'avions arrive à destination en fonction de λ et de t.

Problème 3

Faites la convolution d'une fonction de distribution uniforme sur elle même 3 ou 4 fois (analytiquement ou par simulation Matlab) et trouvez vers quelle fonction de distribution le résultat converge.

Problème 4

Tous les bateaux voyagent à travers un canal très large. Certains bateaux viennent de l'est et d'autre de l'ouest. Le processus des arrivées de ceux qui arrivent de l'est est un processus de Poisson avec une intensité de λ_e bateaux par jour. Le processus des arrivées de ceux qui arrivent de l'ouest est un processus de Poisson avec une intensité de λ_o bateaux par jour. Dans la canal il y a un pointeur qui pointe dans la direction dans laquelle le dernier bateau est arrivé. Si le dernier bateau est arrivé de l'ouest, le pointeur va pointer vers l'ouest. Chaque bateau prend j jours pour traverser le canal. Les questions sont les suivantes :

1. Etant donné que le pointeur pointe vers l'ouest :
   – Quelle est la probabilité que le prochain bateau qui passe vienne de l'ouest ?
   – Quelle est la densité de probabilité pour le temps restant jusqu'à ce que le pointeur change de direction ?
2. Quelle est la probabilité qu'un bateau venant de l'est ne voie (ne croise) aucun bateau venant de l'ouest durant son voyage à travers le canal ?
3. (*) Nous commençons une observation en un temps arbitraire. Soit V le temps d'observation jusqu'à ce qu'on voie arriver le septième bateau venant de l'est. Quelle est la fonction de répartition de v ? (indication : voir cours § 7.2.3)

Problème 5

1. Un train part toutes les heures de Lausanne à Neuchâtel sur l'heure (à 13 heures, à 14 heures, ...). Les passagers arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ. Trouvez le nombre moyen de passagers qui vont monter à Lausanne.
2. Maintenant supposez que les trains n'opèrent plus selon un horaire fixe (pas très suisse tout ça !), mais que les inter-départs sont indépendants et distribués exponentiellement avec une intensité de μ par heure. Trouvez le nombre de trains arrivant en une heure.
3. Définissons un "événement" qui est soit l'arrivée d'un passager, soit le départ d'un train. Combien d'événements se passent en une heure en moyenne ? (indication : voir cours § 7.2.1.3)
4. Si un passager arrive à la gare et qu'il voit 2λ personnes qui attendent le train, calculez le temps moyen qu'il doit attendre jusqu'au prochain train.
5. Trouvez la fonction de répartition du nombre de personnes qui attendent le train.