Modélisation Stochastique

HAUTE ECOLE SPÉCIALISÉE DE LA SUISSE OCCIDENTALE
Avenue de Provence 6, 1000 Lausanne, Suisse

13 octobre 2009
Stephan Robert, HEIG-Vd

SERIE 5

Chaînes de Markov discrètes

Remarque importante

Cette série doit être faite **individuellement** ! Elle doit être rendue pour le **27 octobre** et sera notée.

Problème 1

Soit une chaîne de Markov définie par sa matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

où $0 \leq \alpha \leq 1$. L'ensemble des états est donné par $\{0, 1, 2\}$.

1. Pour quelles valeurs de α la chaîne de Markov est-elle irréductible et ergodique ?
2. Calculez les probabilités d'état en fonction de α.

Problème 2

Soit une chaîne de Markov définie par sa matrice de transition :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'ensemble des états est donné par $\{0, 1, 2, 3\}$. Si $X_0 = 1$, quelle est la probabilité que l'état 0 soit visité avant l'état 3 ?

Problème 3

1. Identifiez les états transitoires, récurrents et périodiques de la chaîne de Markov décrite par la matrice de transition suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

2. Combien de classes sont formées par les états récurrents de ce processus ?
3. Evaluez $\lim_{n\to\infty} p_{41}(n)$ et $\lim_{n\to\infty} p_{66}(n)$

Problème 4

Un point se déplace sur un cercle unité et saute de $\pm$ 90 degrés. Supposez que le processus est initialement à 0 degrés et que la probabilité de passer à $+$ 90 degrés est de p (tourner de $+$ 90 degrés dans le sens inverse des aiguilles de la montre) et la probabilité de passer à $-$ 90 degrés est q.

1. Trouvez les probabilités de transition pour la chaîne de Markov résultante et calculez les probabilités d'état.
2. Est-ce que le processus est réversible ? Pourquoi ou pourquoi pas ?

Problème 5

Considérez une marche aléatoire dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, M\}$ avec les probabilités de transition $p_{00} = q, p_{01} = p, p_{i,i+1} = p, p_{M,M} = p, p_{M,M-1} = q, p_{i,i-1} = q$ pour $i = 1, \ldots, M-1$. Trouvez la proportion du temps passé dans chaque état.

MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING

SERIE 5

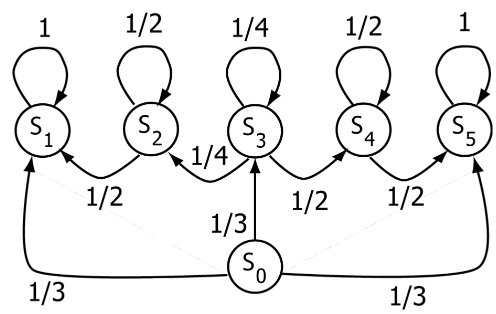
Problème 6

On a une machine de production qui consiste en deux parties distinctes qui tombent en panne et sont réparées indépendamment. Une des parties tombe en panne avec une probabilité a pendant un jour et est réparée avec une probabilité b le jour suivant. Soit X_n le nombre de parties qui fonctionnent (soit 0, 1 ou 2) durant un jour ouvrable n.

1. Montrez que X_n est une chaîne de Markov à trois états et donner sa matrice de transition $\mathbf{P}$.
2. Trouver les probabilités de l'état stationaire.

Problème 7

Considérez cette chaîne de Markov :



Le processus est dans l'état S_0 au départ. Calculez la probabilité que :

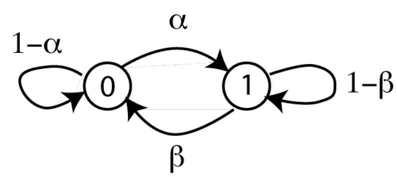
1. Le processus entre dans l'état S_2 pour la première fois en fonction du k^{ieme} pas d'itération.
2. Le processus n'entre jamais dans l'état S_4.
3. Le processus entre dans l'état S_2 et ressorte le pas d'itération suivant.
4. Le processus entre dans S_1 pour la première fois au troisième pas d'itération.
5. Le processus est dans l'état S_3 immédiatement après le n^{ieme} pas d'itération.

Problème 8

Montrer que si $\mathbf{P}^k$ a des colonnes identiques, alors $\mathbf{P}^j$ a des colonnes identiques pour tout $j \geq k$.

Problème 9 (Facultatif : Matlab)

Générez du trafic ATM à l'aide d'une chaine de Markov à deux états. Etat initial = 1. $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.1$.



1. Dessiner plusieurs réalisations du processus (simulation).
2. Dessiner l'évolution des probabilités d'état (calcul).
3. Estimez la moyenne du processus en fonction du temps (sur une réalisation seulement et ensuite sur plusieurs réalisations).
4. Est-ce que cette chaîne de Markov est réversible dans le temps ?