HAUTE ECOLE SPÉCIALISÉE DE LA SUISSE OCCIDENTALE
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud

Master of Science in Engineering (MSE)

Cours central (bases théoriques) : Modélisation stochastique
(Semestre d'hiver 2009, S. Robert)

SERIE 2

22 septembre 2009

Problème 1

Montrez que le coefficient de corrélation

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

est égal à ± 1 où X et Y sont deux variables aléatoires et si $Y = aX + b$.

Problème 2

Considérez un processus aléatoire X_t défini par : $X_t = \sin(2\pi f_c t)$ où f_c est une variable aléatoire uniformément distribuée dans $[0, W]$. Est-ce que X_t est stationnaire ? Truc : Examiner les fonctions du processus aléatoire X_t pour les fréquences $W/4$, $W/2$, et W.

Problème 3

Prouvez les propriétés de la fonction d'autocorrélation $R_X(\tau) = E(X_t X_{t+\tau})$ du processus X_t :

1. Si X_t contient une composante DC égale à A, alors $R_X(\tau)$ contient une composante égale à A^2.
2. Si X_t contient une composante sinusoidale, alors $R_X(t)$ va aussi contenir une composante sinusoidale de même fréquence.

Problème 4

Considérez le processus stochastique X tel que $X_t = Y.\cos(\omega t)$ où Y est une variable aléatoire uniformément distribuée entre 0 et 2, $\omega = 2\pi f_0$ avec $f_0 = 10$. Déterminez la densité de probabilité de X_t aux instants suivants : (a) $t = 0$, (b) $t = \pi/(4\omega)$, (c) $t = \pi/(2\omega)$ et (d) $t = \pi/(\omega)$.

HAUTE ECOLE SPÉCIALISÉE DE LA SUISSE OCCIDENTALE

Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud

SERIE 2

22 septembre 2009

Problème 5

Considérez le processus stochastique X tel que $X_n = \{X_n, n \geq 1\}$ où

$$X_n = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$$

Les variables aléatoires $Z_i, i \geq 1,$ *iid* (indépendantes , identiquement distribuées), ont leur espérance mathématique nulle et leur variance égale à l'unité. Est-ce que le processus stochastique est stationnaire ?

Problème 6

Considérez le processus stochastique discret X tel que X_n qui prend les valeurs 1 et -1 selon le résultat d'un jet d'une pièce de monnaie. X_n sera égal $(-1)^n$ si la pièce de monnaie tombe sur pile et il sera égal à $(-1)^{n+1}$ si la pièce de monnaie tombe sur face, pour tout n. (a) Esquissez les réalisations du processus stochastique. (b) Trouvez la densité de probabilité du processus stochastique. (c) Quelle est l'espérance mathématique du processus stochastique, et son auto-covariance ?

Problème 7

Trouvez une expression en termes d'auto-corrélation pour $E[|X_n - X_m|^2]$.

Problème 8

Considérez les moyennes glissantes suivantes : $Y(n) = \frac{1}{2}(X(n)+X(n-1))$ avec $X(0) = 0$ et $Z(n) = \frac{2}{3}X(n)+\frac{1}{3}X(n-1)$ avec $X(0) = 0$. Si $X(n)$ est bernoullien, que vaut $E(Y(n)Y(n+k))$ et $E(Z(n)Z(n+k))$?

Problème 9

Considérez les processus autorégressifs suivants : $W(n) = 2W(n-1)+X(n)$ avec $W(0) = 0$ et $Z(n) = \frac{1}{2}Z(n-1) + X(n)$ avec $Z(0) = 0$. Trouver $E(W(n))$ et $E(Z(n))$.

HAUTE ECOLE SPÉCIALISÉE DE LA SUISSE OCCIDENTALE
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud

SERIE 2

22 septembre 2009

Problème 10

Est-ce que le processus X tel que $X_t = A\cos(\omega t + \phi)$, avec ϕ étant une variable aléatoire uniformément distribuée dans $[-\pi, \pi]$ est stationnaire ? Stationnaire au sens large ?stationnaire au sens strict ?

Problème 11*

Le signal $x(t)$ ci-dessous a une amplitude constante A, une période T_0 et un retard t_d. Il représente une réalisation du processus X_t. Le reatrd est aléatoire et est décrit par la densité de probabilité

$$f_{T_d}(t_d) = \begin{cases} \frac{1}{T_0} & -\frac{1}{2}T_0 \leq t_d \leq \frac{1}{2}T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire X_{t_k} obtenue en observant le processus aléatoire X_t au temps t_k.
2. Déterminez l'espérance mathématique et la fonction d'autocorrélation de X_t en utilisant la définition de l'espérance mathématique.
3. Déterminez la moyenne et la fonction d'autocorrélation de X_t en utilisant un moyennage dans le temps.
4. Dites si oui ou non le processus X_t est stationnaire. Dans quel sens est-il ergodique ?

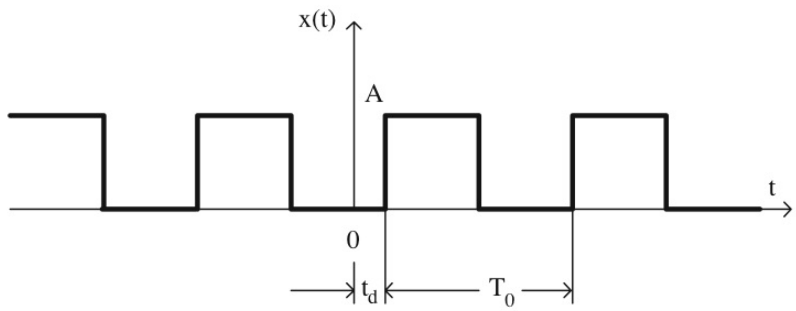

FIGURE 1 – Fonction rectangulaire