# Modélisation Stochastique

HAUTE ECOLE SPÉCIALISÉE DE LA SUISSE OCCIDENTALE
Avenue de Provence 6, 1000 Lausanne, Suisse

15 décembre 2009
Stephan Robert, HEIG-Vd

## SERIE 10 : Solutions
**Estimation et décisions**

**Problème 1**

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

1. Montrez que les estimateurs
$$\Lambda_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
et
$$\Lambda_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$
sont des estimateurs non biaisés de $\lambda$.
2. Quel est l'estimateur le plus efficace ?

**Problème 2**

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires suivant une loi binômiale de paramètres $m$ et $p$, où $m$ est supposé connu et $p$ inconnu. Déterminez l'estimateur du maximum de vraissemblance de $p$.

**Problème 3**

Nous nous plaçons dans le cas suivant en reprenant l'exemple du cours :

- $H_0$ : $S_0 = 0$ est transmis

- $H_1 : S_1 = 1$ est transmis
- $\sigma = 1$

L'erreur de première espèce est alors appelée "fausse alarme" ($P_1$) et l'erreur de deuxième espèce est appelée "signal manqué" ($P_2$). Nous voulons que $P_1 = 0.1$. Avec le test de Newman-Pearson, déterminez quel signal a été transmis si $x = 0.5$. Déterminez également $P_2$.

**Problème 4**

Soit une source binaire générant aléatoirement les signaux $s_0 = 0$ avec la probabilité $p_0$ et $s_1 = A$ avec une probabilité $p_1$. La voie de transmission est perturbée par un bruit $n(t)$ à valeur moyenne nulle et densité de probabilité $p_n = \exp(-2|n|)$. Déterminez en fonction des paramètres $A$, $p_0$ et $p_1$ le seuil qui minimise le risque moyen. Application numérique : $p_0 = 0.8$, $p_1 = 0.2$, $A = 3$ volts.

**Problème 5**

Soit une source binaire générant les signaux $s_0 = 0$ (absence de signal) et $s_1 = A$. De plus la statistique du bruit au niveau du récepteur varie en fonction de la présence ou non de signal :

$$p_{n0}(n|s_o) = \exp(-n)\epsilon(n)$$

$$p_{n1}(n|s_1) = (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}n^2/\sigma_{n1}^2)$$

En supposant que les coefficients des coûts associés aux cas de décisions erronnées sont égaux à 1 (avec $c_{00} = c_{11} = 0$), définir un seuil de décision qui minimise la probabilité d'erreur maximum. Application numérique : $\sigma_{n1} = 11.1$ volts et $A = 6\sigma_{n1}$.

**Problème 6**

Soit une source générant un signal aléatoire binaire $x(t)$ prenant soit la valeur $1$ avec une probabilité de $P(H_1) = 0.5$ soit la valeur $0$ avec une probabilité $P(H_0) = 0.5$. Nous supposons dans un premier temps ces probabilités connues. Avant de parvenir à destination ce signal est additionné d'un bruit gaussien $n(t)$ de valeur moyenne nulle et de variance $\sigma^2$. A la réception, au temps $t$, on doit décider à quelle valeur du signal émis correspond la valeur du signal reçu.

**Problème 7**

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ $n$ variables aléatoires iid suivant une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On choisi les hypothèses : $H_0 = \mu_0$ et $H_1 = \mu_1$. Pour quel seuil est-ce que l'hypothèse $H_0$ sera-t-elle acceptée ?

---