Swiss Universities of Applied Sciences

Master of Science in Engineering (MSE)

Cours central (bases théoriques) : Modélisation stochastique

(Semestre d'hiver 2009, Stephan Robert, HEIG-Vd)

SERIE 1

15 septembre 2009

Problème 1 (*Axiomes*)

Soit A et B deux événements. Faites usage des axiomes des probabilités pour prouver ceci :

1. $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$
2. La probabilité que un et seulement un des événements A ou B se réalise est donnée par $P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$.

Problème 2 (*Variables aléatoires*)

Une source d'information produit des symboles aléatoirement depuis un alphabet de cinq lettres : $S = \{a,b,c,d,e\}$. Les probabilités d'apparition des symboles sont les suivantes : $P(a) = 0.5$, $P(b) = 0.25$, $P(c) = 0.125$, $P(d) = P(e) = 0.0625$. Un système de compression de données code les lettres sous forme de chaîne de caractères binaires :

a	1
b	01
c	001
d	0001
e	0000

Soit une variable aléatoire Y qui représente la longueur de la chaîne binaire à la sortie du système. Quelle est la distribution de Y ?

Problème 3 (*Distributions*)

Considérez une variable aléatoire exponentiellement distribuée X avec le paramètre λ. Soit F une fonction de distribution. Trouvez le nombre réel μ qui satisfait : $F(\mu) = 1/2$.

Problème 4 (*facultatif*)

Soient les événements A, B, C. Montrez que l'identité suivante est vérifiée :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

SERIE 1

15 septembre 2009

Problème 5 (*Approximation de la loi binômiale*)

Comparez l'approximation de Poisson pour la distribution binômiale et la distribution binômiale pour k = 0, 1, 2, 3,... et

a) n = 10, p = 0.1

b) n = 20, p = 0.05

c) n = 100, p = 0.01

Problème 6 (*Probabilités conditionnelles*)

Avant de partir au travail, Mr. X écoute les nouvelles du temps pour décider s'il va ou non emporter un parapluie. Si les nouvelles prédisent de la pluie la probabilité qu'il pleuve est de 80%. Au contraire si les nouvelles ne prédisent pas de pluie il y a une probabilité de 10% qu'il pleuve. Au printemps il y a une probabilité de 70% que les nouvelles annoncent de la pluie. Par contre, en automne, il y a une probabilité de 20% que les nouvelles annoncent de la pluie.

a) Un jour Mr. X a oublié d'écouter les nouvelles et il a plu. Quelle est la probabilité que les nouvelles aient annoncé de la pluie si nous sommes au printemps ? Et si nous sommes en automne ?

b) La probabilité que Mr. X oublie d'écouter les nouvelles le matin est de 0.2 au printemps comme en automne. S'il manque les nouvelles, Mr. X tire au sort, avec une pièce de monnaie, s'il prend un parapluie ou non. Quand Mr. X écoute les nouvelles et qu'elles annoncent de la pluie, Mr. X va toujours prendre son parapluie et si elles n'annoncent pas de pluie il ne va jamais prendre son parapluie. Est-ce que les événements “Mr. X prend son parapluie” et “Les nouvelles n'annoncent pas de pluie” sont indépendants ? Est-ce que la réponse dépend de la saison ?

c) Mr. X porte un parapluie et il ne pleut pas. Quelle est la probabilité que Mr. X ait écouté les nouvelles ?
